

Grundlagen der Elektrotechnik 2

Mirco Meiners Alicia von Ahlen

2025-07-17

Inhaltsverzeichnis

Unsyllabus	1
I. Seminar	3
1. Einleitung	5
1.1. Wissenschaftliches Rechnen / Datenwissenschaft	5
1.2. Schaltungssimulation (SPICE)	5
1.3. Betriebssystem (OS) - Werkzeuge (Tools)	5
1.4. Code Editoren	5
1.5. Datenverarbeitung / Data Sciences	6
1.5.1. Dateisystem / Journaled File System	6
1.5.2. Tabellenformate / Rectangular Data	6
1.5.3. Serialisation	6
1.5.4. Spezielle Formate / Data Frames	6
1.5.5. Embedded DB-Engines	6
1.6. Schreibst Du noch oder TeXst Du schon?	7
1.7. LaTeX Editoren	7
1.8. Literaturverwaltung und LaTeX	7
1.9. Schöne neue Welt	8
1.10. Halbleiterherstellung (Infineon, Dresden)	8
1.11. FinFET (Intel)	8
1.12. TSMC Fab (Next Gen 7/5 nm)	8
1.13. Es war einmal	9
1.14. Damals und heute	9
1.15. Systemhierarchie	10
1.16. Schnittstellen zur Aussenwelt	11
1.17. Meeting mit einem System	11
1.18. System in a Package (SiP)	12
1.19. Sie werden unsere Experten	12
1.20. Lernziele des Moduls	13
1.21. Seminaristischer Unterricht	13
1.22. Beschreibung elektrotechnischer Systeme	13
1.23. Konzentrierte Schaltelemente	14
1.24. Harmonische Signale	14
2. Netzwerkerregung	15
2.1. Schaltzeichen	15
2.2. Erregungsarten	15
2.3. Sinusförmige Erregung, periodische Vorgänge	15

Inhaltsverzeichnis

2.4. Eigenschaften harmonischer Funktionen	16
2.5. Mittelwerte periodischer Zeitfunktionen	16
2.6. Ideale Netzwerkelemente	17
3. Komplexe Wechselstromrechnung	19
3.1. Beschreibung und Analyse im Frequenzbereich	19
3.2. Symbolisches Verfahren	19
3.3. Vorteile des Frequenzbereichs	20
3.4. Funktionaltransformation	20
3.4.1. Definitionen	21
3.5. Zeigerdarstellung	21
3.5.1. Grundschaltelemente	21
3.5.2. Komplexe Zahlen mit Python	21
4. Impedanz, Admittanz und Leistung	25
4.1. Widerstandsoperator	25
4.2. Leitwertoperator	26
4.3. Vergleich von RLC-Netzwerken	26
4.4. Leistung von Wechselsignalen	27
5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen in Frequenz- und Zeitbereich 29	
5.1. Bode-Diagramm	29
5.2. Übertragungsfaktor [5]	29
5.3. Angaben in dB [5]	30
5.4. Verzögerungszeit und Anstiegszeit [5]	31
5.5. Nyquist-Diagramm	32
5.5.1. Ortskurve einer RC-Schaltung	33
5.5.2. Inversion von Ortskurven	34
5.6. RC-Filter	36
5.6.1. RC-Tiefpaß [5]	36
5.6.2. RC-Hochpaß	43
5.6.3. RC-Bandpaß	48
5.7. Messbrücken	49
5.7.1. Wheatstone-Messbrücke – Gleichstrommessbrücke	49
5.7.2. Wechselstrommessbrücke	49
5.7.3. Wien-Robinson-Brücke – einfaches Frequenzmessgerät	50
6. Schwingkreise	51
6.1. Zusammenfassung der physikalische Grundlagen	52
6.2. Energiependel	53
6.3. RLC-Reihenschwingkreis (aktiver Zweipol)	54
6.4. Grundeigenschaften von Reihen- und Parallelschwingkreis (passiver Zweipol)	57
6.5. Vereinheitlichte Kennzeichnung	58
6.6. Gegenüberstellung der Eigenschaften der elementaren Schwingkreise	59
7. Netzwerkanalyse	61
7.1. Systemsimulation	61
7.2. Makrotheorie	61

7.3.	Netzwerksimulation	61
7.4.	Netzwerk	62
7.4.1.	Transiente Analyse	62
7.4.2.	Differentialgleichungssystem	63
7.5.	Netzwerkanalyse zeitabhängiger Signale	63
7.6.	Lösung im Frequenzbereich	63
7.7.	Grundaufgabe der Netzwerkanalyse	64
7.8.	Netzwerkgleichungen – Kirchhoff'sche Gesetze	64
7.9.	Vollständiges Kirchhoff'sches Gleichungssystem	64
7.10.	Netzwerkstruktur	64
7.10.1.	Unabhängige Knoten und Maschen	64
7.10.2.	Netzwerkgraph	64
7.11.	Vollständiger Baum	65
7.11.1.	Merkmale	65
7.12.	Baumkomplement	65
7.13.	Maschenstromverfahren	65
7.14.	Wahl der unabhängigen Ströme I_M	65
7.15.	4 Maschengleichungen	66
7.16.	Knotenspannungsanalyse	66
7.17.	Knotenspannungs- vs Maschenstromanalyse	67
8.	Spulen und Übertrager	69
8.1.	Physikalische Grundlagen	69
8.2.	Spulen	72
8.2.1.	Anwendungsbeispiele	74
8.3.	Transformatoren und Übertrager	76
8.3.1.	Der verlustlose Übertrager	78
8.3.2.	Realer (verlustbehafteter) Übertrager	80
8.3.3.	Übertragungsfaktor	81
8.3.4.	Leistungsübertrager, Transformatoren	83
II.	Hörsaalübungen	85
9.	Periodische Signale	87
9.1.	Darstellung von Signalen	87
9.2.	Überlagerung von sinusförmigen Spannungen mit verschiedenen Frequenzen	89
9.2.1.	Periodendauer	89
9.2.2.	Mittelwert	89
9.2.3.	Effektivwert	90
9.2.4.	Scheitelfaktor	90
9.3.	Schaltungsberechnung in reeller Schreibweise	93
9.3.1.	Amplitude und Phase	93
9.3.2.	Spannungsverläufe	94
9.4.	Phasenanschnittsteuerung	95
9.4.1.	Aufgabe	96

10. Signale	99
10.1. Komplexe Signale	99
10.1.1. Signaldarstellung	100
10.1.2. Sinussignale	100
10.1.3. Übertragungsfaktor	101
10.1.4. Spannungsverlauf	102
10.2. Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung	102
10.2.1. Strom- und Spannungsbeschreibung	104
10.2.2. Komplexe Leistung	104
10.2.3. Ersatzschaltung	104
11. Spannungsteiler	107
11.1. Schaltungsaufgabe mit Zeigerdiagramm	107
11.1.1. Zeigerdiagramm	107
11.2. Kompensierter Spannungsteiler	108
11.2.1. Spannungsteiler	109
11.2.2. Eingangsimpedanz	110
11.2.3. Kapazität	110
11.3. RC-Spannungsteiler	110
11.3.1. Spannungsverhältnis	111
11.3.2. Betrag und Phase	111
12. Bode-Diagramm und Nyquist-Ortskurve	115
12.1. Schaltungsanalyse mit dem Bode-Diagramm	115
12.1.1. Funktion	115
12.1.2. Bauteilanordnung	116
12.1.3. Spannungsübertragungsfunktion	116
12.1.4. Betrag und Phase	116
12.1.5. 3 dB-Grenzfrequenz	117
12.1.6. Grenzfrequenz	117
12.2. Ortskurve einer Zweipol-Admittanz	118
12.3. Ortskurve mit verschiedenen Parametern	118
12.3.1. Ortskurve mit ω als Parameter	118
12.3.2. Ortskurve mit R als Parameter	121
13. Anpassung und Wechselstrommessbrücke	125
13.1. Blindleistungskompensation	125
13.1.1. Leistungsfaktor	125
13.1.2. Auslegung	125
13.1.3. Zusätzlicher Verbraucher	126
13.2. Anpassung einer Heizeinrichtung	127
13.3. Wien-Robinson-Brücke	128
13.3.1. Widerstandsverhältnis	129
13.3.2. Kreisfrequenz	129
13.3.3. Ortskurve	130
13.3.4. Übertragungsfaktor	132

14. Leistungsanpassung und Schwingkreis	135
14.1. Leistungsberechnung	135
14.1.1. Leistungsaufnahme	135
14.1.2. Bestimmung der Kapazität	136
14.1.3. Maximale Leistung	136
14.2. Parallelresonanzkreis mit Übertrager	137
14.2.1. Ersatzschaltbild	137
14.2.2. Zusammenfassen	138
14.2.3. Güte und Resonanz	138
15. Audio-Applikationen	141
15.1. Resonanztransformator	141
15.2. Ersatzschaltbild eines Lautsprechers	145
15.2.1. Eingangsimpedanz	145
15.2.2. Ortskurve	146
15.2.3. Wert der Impedanz	146
15.2.4. Ortskurve	146
15.2.5. Bode-Diagramm	147
III. Tutorium	153
16. Einführung	155
16.1. Organisatorisches	155
16.2. Termine	155
17. Komplexe Zahlen	157
17.1. Die imaginäre Einheit	157
17.2. Aufbau komplexer Zahlen	158
17.3. Rechenoperationen	158
17.3.1. Addition von komplexen Zahlen	158
17.3.2. Subtraktion von komplexen Zahlen	158
17.3.3. Betrag einer komplexen Zahl	158
17.3.4. Phasenwinkel einer komplexen Zahl	158
17.3.5. Eulersche Identität und Polarkoordinaten	159
17.3.6. Multiplikation komplexer Zahlen	159
17.3.7. Division komplexer Zahlen	160
17.3.8. Kehrwert einer komplexen Zahl	160
17.3.9. Konjugiert-Komplex	160
17.4. Übungen	160
17.4.1. Aufgabe 2.1	160
17.4.2. Aufgabe 2.2	160
17.4.3. Aufgabe 2.3	161
17.4.4. Aufgabe 2.4	161
17.4.5. Aufgabe 2.5	161
17.4.6. Aufgabe 2.6	162
17.4.7. Aufgabe 2.7	162
17.4.8. Aufgabe 2.8	162

Inhaltsverzeichnis

17.4.9. Aufgabe 2.9	163
17.4.10. Aufgabe 2.10	163
17.4.11. Aufgabe 2.11	164
18. Periodische Signale	165
18.1. Stromarten	165
18.2. Kennwerte von Wechselgrößen	171
18.2.1. Periodendauer und Frequenz	171
18.2.2. Phasenlage	172
18.2.3. Mittelwert	173
18.2.4. Gleichrichtwert	173
18.2.5. Effektivwert	173
18.2.6. Effektivwert mit Gleichstromanteil	174
18.3. Übungen	175
18.3.1. Aufgabe Gleichrichtwert	175
18.3.2. Aufgabe Zeitfunktion berechnen	175
18.3.3. Aufgabe Mittelwerte aus Zeitverlauf bestimmen	176
18.3.4. Aufgabe 3.4	178
18.3.5. Aufgabe 3.5	179
18.3.6. Aufgabe 3.6	180
18.3.7. Aufgabe 3.7	181
19. Komplexe Größen der Wechselstromtechnik	183
19.1. Zeigerdiagramm	183
19.2. Übungen Teil 1	184
19.2.1. Übung 4.1 (Beispiel 3.6)	184
19.3. Komplexer Drehzeiger	185
19.4. Komplexer Festzeiger	186
19.5. Komplexer Widerstand	188
19.6. Komplexer Leitwert	188
19.7. Übungen Teil 2	188
19.7.1. Übung 4.2	188
19.7.2. Übung 4.3	189
19.7.3. Übung 4.4	190
20. Verhalten der Grundzweipole 1	193
20.1. Zweipole	193
20.2. Wirkwiderstand	193
20.2.1. Spannung, Strom und Phasenwinkel	193
20.2.2. Wirkleistung	194
20.3. Kapazität	195
20.3.1. Spannung, Strom und Phasenwinkel	195
20.3.2. Kapazitiver Blindwiderstand	196
20.4. Einfache Schaltungen	197
20.4.1. Reihenschaltung	197
20.4.2. Parallelschaltung	197
20.5. Übungen	197
20.5.1. Übung 5.1	197

20.5.2. Übung 5.2	197
20.5.3. Übung 5.3	198
20.5.4. Übung 5.4	199
20.5.5. Übung 5.5	200
20.5.6. Übung 5.6	201
20.5.7. Übung 5.7	202
21. Verhalten der Grundzweipole 2	205
21.1. Induktivität	205
21.1.1. Spannung, Strom und Phasenwinkel	205
21.1.2. Induktiver Blindwiderstand	206
21.1.3. Induktive Blindleistung	207
21.2. Kapazitive Blindleistung	207
21.3. Allgemeiner passiver Sinusstrom-Zweipol	208
21.3.1. Scheinwiderstand und Scheinleitwert	208
21.3.2. Leistungen	209
21.3.3. Begriffe	210
21.3.4. Übersichten	210
21.4. Übungen	210
21.4.1. Übung 6.1	210
21.4.2. Übung 6.2	211
21.4.3. Übung 6.3	214
21.4.4. Übung 6.4	215
21.4.5. Übung 6.5	215
21.4.6. Übung 6.6	216
21.4.7. Übung 6.7	217
22. Komplexe Wechselstromrechnung	219
22.1. Komplexer Spannungs- und Stromteiler	219
22.2. Leistungsanpassung	219
22.3. Brückenschaltung	220
22.4. Blindleistungskompensation	220
22.5. Überlagerungsprinzip	222
22.6. Maschenstromverfahren	222
22.7. Knotenpotentialverfahren	223
22.8. Übungen	224
22.8.1. Übung 7.1 (Zusammenfassung komplexer Impedanzen)	224
22.8.2. Übung 7.2 (Netzwerkberechnung)	225
22.8.3. Übung 7.3 (Leistungsanpassung)	227
22.8.4. Übung 7.4 (Brückenschaltung)	228
22.8.5. Übung 7.5 (Blindleistungskompensation)	229
22.8.6. Übung 7.6 (Maschenstromverfahren)	230
22.8.7. Übung 7.7 (Überlagerungsverfahren)	232
23. Filterschaltungen, Bode-Diagramme und Ortskurven	235
23.1. Frequenzgang	235
23.1.1. Bode-Diagramm	235
23.1.2. dB	238

Inhaltsverzeichnis

23.2. Ortskurven	238
23.2.1. Inversionsregeln	240
23.3. Filterschaltungen	241
23.3.1. Tiefpass	241
23.3.2. Hochpass	242
23.4. Übungen	244
23.4.1. Übung 8.1 (Tief- und Hochpass)	244
23.4.2. Übung 8.2 (Tiefpass)	248
23.4.3. Übung 8.3 (Tiefpass Grenzfrequenz)	249
23.4.4. Übung 8.4 (Hochpass)	250
23.4.5. Übung 8.6 (Ortskurve)	251
23.4.6. Übung 8.7 (Ortskurve)	251
24. Schwingkreise	255
24.1. Schwingkreis	255
24.2. Reihenschwingkreis	255
24.2.1. Resonanzfrequenz	256
24.2.2. Bandbreite und Güte	256
24.3. Parallelschwingkreis	257
24.3.1. Resonanzfrequenz	257
24.3.2. Bandbreite und Güte	258
24.4. Übungen	259
24.4.1. Übung 9.1	259
24.4.2. Übung 9.2	260
24.4.3. Übung 9.3	261
25. Transformator	263
25.1. Idealer Transformator	264
25.2. T-Ersatzschaltbild	266
25.2.1. T-Symmetrie	267
25.3. Vermessung eines Transformators	268
25.4. Leerlaufversuch	268
25.5. Kurzschlussversuch	268
25.6. Übungen	270
25.6.1. Übung 10.1	270
25.6.2. Übung 10.2	271
25.6.3. Übung 10.3	272
25.6.4. Übung 10.4	273
26. Klausurvorbereitung I	275
26.1. Aufgabe 11.1 (Übertragungsfunktion)	275
26.2. Aufgabe 11.2 (Schwingkreis)	276
26.3. Aufgabe 11.3 (Anpassung)	278
26.4. Aufgabe 11.4 (Transformator)	280
27. Klausurvorbereitung II	283
27.1. Aufgabe 12.1 (Übertragungsfunktion)	283
27.2. Aufgabe 12.2 (Brückenschaltung)	284

Inhaltsverzeichnis

27.3. Aufgabe 12.3 (Parallelschwingkreis)	286
Literaturverzeichnis	289

Unsyllabus

Name	Beschreibung
Kursus	M 2.3 Grundlagen der Elektrotechnik 2 (GEL2)
Semester	SoSe25
Dozent	Prof. Dr.-Ing. M. Meiners
Seminar	Mo., 09:45 Uhr - 11:15 Uhr, E 509
Tutorin	B.Eng. Alicia von Ahlen
Tutorium	Mo., 08:00 Uhr - 09:30 Uhr, E 509

Teil I.

Seminar

1. Einleitung

1.1. Wissenschaftliches Rechnen / Datenwissenschaft

- Python
- Matlab
- Gnu Octave
- Command-line tools

1.2. Schaltungssimulation (SPICE)

- LTspice Linear Technology
- ngspice (open-source)
- ELDO (Siemens EDA)
- Spectre (cadence)
- PrimeSim HSPICE (SYNOPSIS)

1.3. Betriebssystem (OS) - Werkzeuge (Tools)

- SSH (Secure Shell)
- Microsoft-Terminal
- Microsoft-PowerShell
- MacOS-Terminal
- Linux/MacOS zsh-tools
- Linux/MacOS bash-it
- Git (Versionskontrolle)
- TortoiseGit – Windows Shell Interface to Git

1.4. Code Editoren

- Visual Studio Code
- Notepad++ (Windows)
- Emacs
- Vim

1. Einleitung

1.5. Datenverarbeitung / Data Sciences

1.5.1. Dateisystem / Jounaled File System

- Ordner / Directories
- Dateien / Files

1.5.2. Tabellenformate / Rectangular Data

- Comma-Separated-Values (CSV), Tab-Separated-Values (TSV)
- wireservice/csvkit: A suite of utilities for converting to and working with CSV, the king of tabular file formats.
- johnkerl/miller: Miller is like awk, sed, cut, join, and sort for name-indexed data such as CSV, TSV, and tabular JSON
- Spreadsheet (.xlsx, .ods)
- apache/iceberg: Apache Iceberg
- apache/iceberg-python: Apache Pylceberg

1.5.3. Serialisation

- Data Serialization — The Hitchhiker’s Guide to Python
- JSON
- MessagePack: It’s like JSON. but fast and small.

1.5.4. Spezielle Formate / Data Frames

- Mastering Python Dictionaries: Efficient Data Storage and Retrieval - Adventures in Machine Learning
- MAT-File Versions - MATLAB & Simulink - MathWorks Deutschland
- HDF5 Or How I Learned To Love Data Compression And Partial I/O
- Was ist Apache Parquet?
- Feather File Format
- polars/polars: Dataframes powered by a multithreaded, vectorized query engine
- ibis-project/ibis: Portable Python dataframe library

1.5.5. Embedded DB-Engines

- SQL, z.B. SQLite
- OLAP, z.B. DuckDB

1.6. Schreibst Du noch oder TeXst Du schon?

- MikTeX (Windows, MacOS, Linux)
- MacTeX (MacOS)
- TeXLive (Linux)

1.7. LaTeX Editoren

- IDE's
 - TeXStudio
 - TeXMaker
 - TeXWorks
- Kollaborative Frameworks
 - ShareLaTeX, Online LaTeX
 - CoCalc - Online LaTeX

1.8. Literaturverwaltung und LaTeX

- Citavi im Detail > Titel exportieren > Export nach BibTeX
- RefWorks - Library Guide Univ. Melbourne
- Benutzerdefinierte BibTex-Keys mit Zotero | nerdpause
- JabRef - Library Guide Univ. Melbourne
- EndNote - Library Guide Univ. Melbourne

1.9. Schöne neue Welt

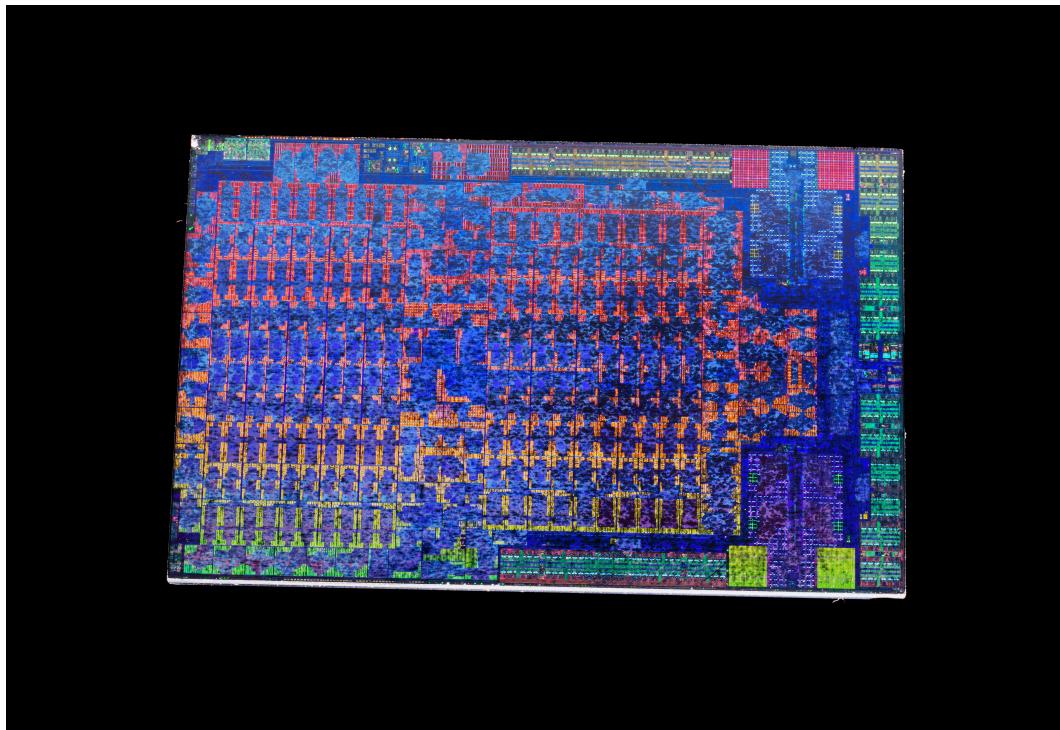


Abbildung 1.1.: AMD Jaguar APU (CPU/GPU), 16 nm, 325 qmm, 2016

1.10. Halbleiterherstellung (Infineon, Dresden)

https://www.youtube.com/embed/_Kj58yQ67KI

1.11. FinFET (Intel)

https://www.youtube.com/embed/_VMYPLXnd7E

1.12. TSMC Fab (Next Gen 7/5 nm)

<https://www.youtube.com/embed/Hb1WDxSoSec>

1.13. Es war einmal ...



Abbildung 1.2.: 1906 die Elektronenröhre

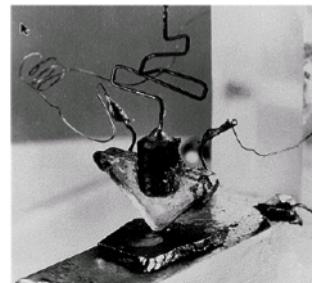


Abbildung 1.3.: 1947 der erste Transistor, Bell Labs Foto

1.14. Damals und heute

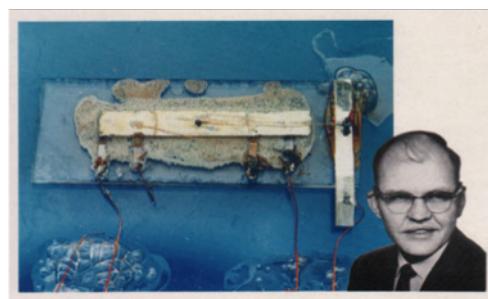


Abbildung 1.4.: 1958 Jack Kilby's erster IC

1. Einleitung

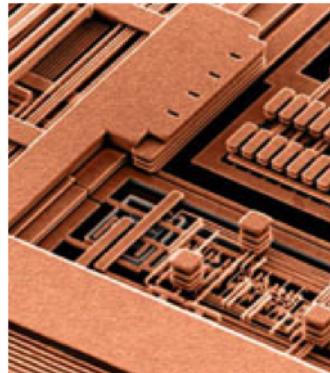


Abbildung 1.5.: Moderner IC

1.15. Systemhierarchie

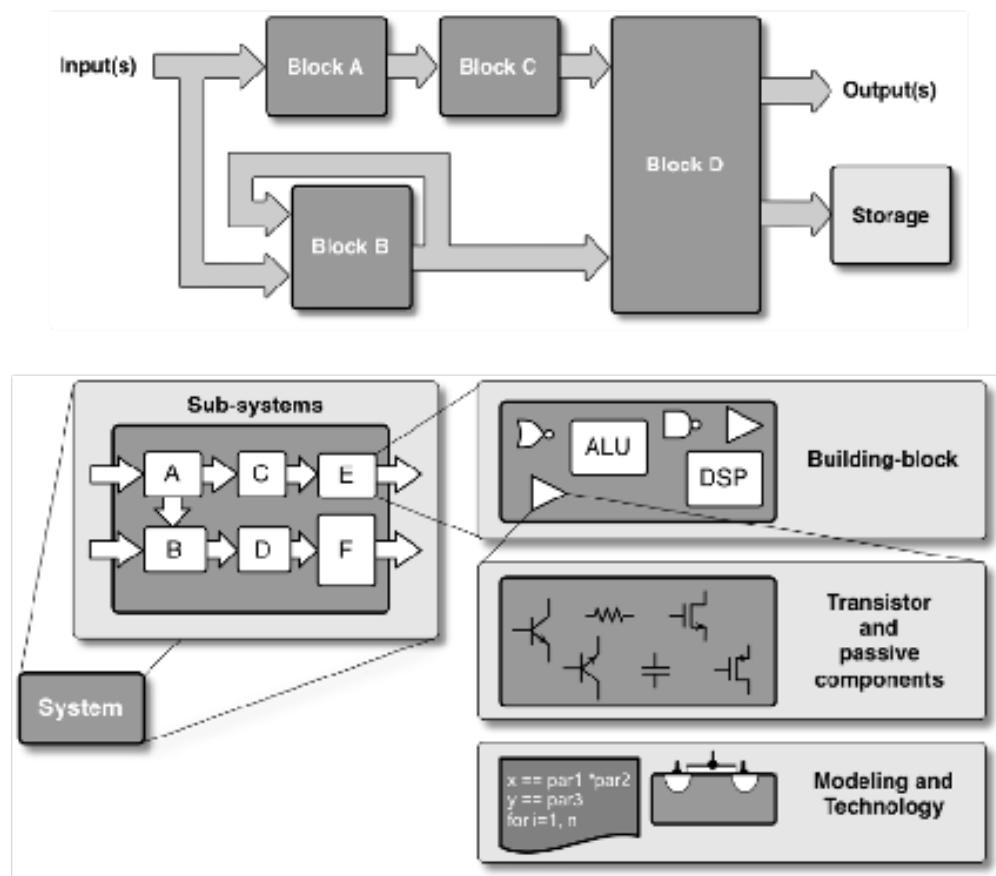
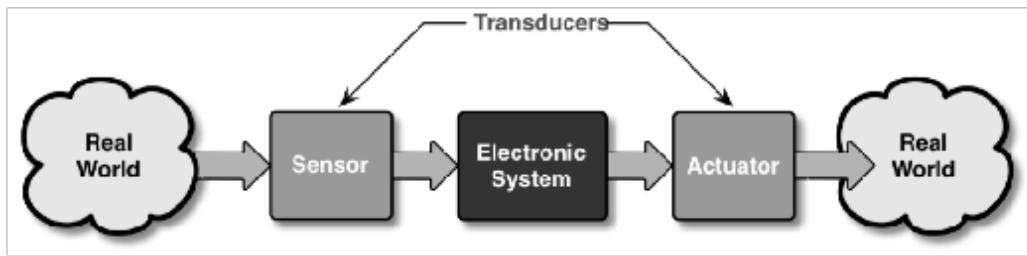


Abbildung 1.6.: Funktionsblöcke eines elektronischen Systems

- Nutzen Sie Hierarchien zur Beschreibung komplexer Systeme

- Teile und herrsche

1.16. Schnittstellen zur Aussenwelt



Entire system involving signals of real world.

Abbildung 1.7.: Interfacing

1.17. Meeting mit einem System

Block diagram of a wireless communication system

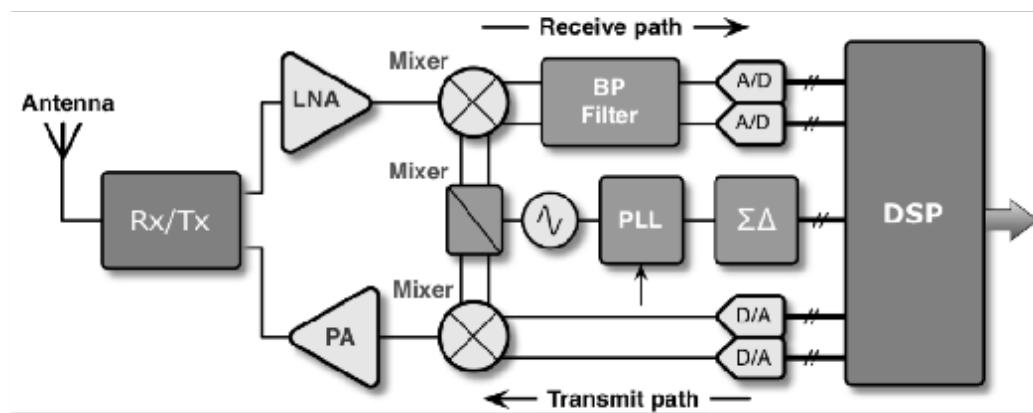
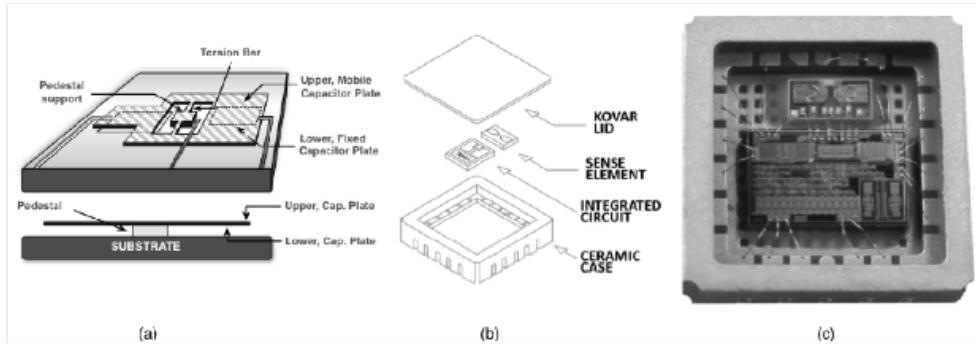


Abbildung 1.8.: Drahtloses Kommunikationssystem

1. Einleitung

1.18. System in a Package (SiP)



- (a) Micro structure of an accelerometer.
- (b) Assembling diagram of the system-on- package.
- (c) Microphotograph. (*Courtesy of Silicon Designs, Inc.*).

Abbildung 1.9.: Beschleunigungssensor

1.19. Sie werden unsere Experten

- Hintergrundwissen
 - Systemverständnis, Architektur, Herstellungsverfahren, Implementation
- Unterbewusste Kompetenz
 - Abgespeicherte Erfahrungen aus Erfolgsgeschichten und Misserfolgen
- Spezialwissen
 - Berufsspezifisches Wissen
- Teamwork Haltung
 - Kommunikationsfähigkeit, Berichtswesen und technische Präsentation
- Kreativität
- Tool-Kenntnisse

1.20. Lernziele des Moduls

- Elektrische Systeme mathematisch und graphisch im Zeit- und Frequenzbereich beschreiben
- Netzwerkanalyse mit RLC-Gliedern
- Spezielle Netzwerke, wie Messbrücken, Schwingkreise und ideale Transformatoren, dimensionieren.

1.21. Seminaristischer Unterricht

- Komplexe Wechselstromrechnung
- Diskrete Bauelemente und ihre Modellierung (RLC)
- Methodik der Netzwerkanalyse
- Anwendungsbeispiele mit EDA-Werkzeugen und wissenschaftliches Rechnen (Scientific Computing)

1.22. Beschreibung elektrotechnischer Systeme

- verschiedene Stufen der Vereinfachung
- Felder / Wellen / Optik / HF-Technik
 - Maxwell-Gleichungen

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = \iint \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}} d\mathbf{A} \quad (1.1)$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \iint \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{A} \quad (1.2)$$

- bei lokaler Konzentration der Feldenergie \Rightarrow quasi-statische Näherung
- Mikrowellentechnik / Leitungstechnik
 - verteilte Schaltungen I, C, ρ
 - Kopplung, Laufzeit $\tau = a/v$
- *kleine* Systeme mit $a \ll \lambda$ bzw. *kurze* Laufzeiten mit $\tau \ll T$
- Regelungstechnik / Impulstechnik
 - Ersatzschaltungen
 - (Block-)Schaltbilder
- eingeschwungener Zustand
- NF-Technik

1. Einleitung

- stationär-periodische Signale
- Sinussignale
- Energietechnik
 - monofrequente Signale $U = Z \cdot I$
 - Frequenz $f \rightarrow 0$
 - Gleichstromtechnik
 - Ohmsches Gesetz $U = R \cdot I$

1.23. Konzentrierte Schaltelemente

i Stromdichte

$$\frac{\int E(r, t) ds}{\iint J(r, t) dA} = \frac{u(t)}{i(t)} \Rightarrow R$$

i Verschiebungsdichte

$$\frac{\iint D(r, t) dA}{\int E(r, t) ds} = \frac{q(t)}{u(t)} \Rightarrow C$$

i Flußdichte

$$\frac{\iint B(r, t) dA}{\oint H(r, t) ds} = \frac{u(t)}{i(t)} \Rightarrow L$$

1.24. Harmonische Signale ...

i als Zeitfunktion

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \phi)$$

i als Zeiger / komplexe Grösse (Phasor)

$$U = |\hat{U}| e^{j\phi}$$

2. Netzwerkerregung

2.1. Schaltzeichen

“In Deutschland sind elektrische Schaltzeichen durch DIN EN 60617 Graphische Symbole für Schaltpläne bzw. IEC 60617 genormt. Sie ersetzen seit 1996–1998 die DIN 40700 / DIN 40900.”

Schaltzeichen nach DIN EN 60617

2.2. Erregungsarten

- Gleichvorgänge
- Nichtperiodische Vorgänge
- Periodische Vorgänge, Spezialfall sind harmonische (sinus-, kosinusförmige) Vorgänge mit der Periodendauer T
- Gleichgrößen mit $f(t) = \text{const.}$ werden mit großen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet, Gleichspannung U und Gleichstrom I
- Zeitveränderliche Größen, hierbei ändert die Erregergröße $f(t)$ ihre Amplitude und/oder ihre Richtung zeitlich. Der Wert von $f(t)$ zum momentanen Zeitpunkt heißt Augenblicks- oder Momentanwert $f(t)$ der physikalischen Größe. Momentanwerte erhalten kleine lateinische Buchstaben, Spannung u und Strom i .

2.3. Sinusförmige Erregung, periodische Vorgänge

[1] [2]

Definitionen

- $f(t) = f(t + nT)$ mit $n = 0, 1, \dots$
- Frequenz $f = 1/T$
- Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
- Periodendauer T
- Wechselgröße allgem. $a(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{A} \sin(\omega t + \omega t_0)$

2. Netzwerkerregung

- Scheitelwert, Maximalwert der Amplitude $\hat{A} = \max A = A_{max}$
- Nullphasenwinkel bzw. Nullzeitpunkt $\varphi = \omega t_0$
- Erregergröße wird aufgetragen mit ωt und nicht t ; $\psi(t) = \omega t + \varphi = \omega t + \omega t_0$
- Bogenmaß ψ / Bogenmaß $= \frac{2\pi}{360} \psi$ / Grad

2.4. Eigenschaften harmonischer Funktionen

- Differentiation, Integration und Addition, Subtraktion mithilfe von Additionstheoremen
- Aufspaltung einer harmonischen Schwingung und Koeffizientenvergleich

i Zusammengefasst

Bei Addition, Differentiation und Integration von harmonischen Funktionen der Kreisfrequenz ω entstehen wieder harmonische Funktionen der gleichen Frequenz, aber veränderter Amplitude und Phase. Bei der Überlagerung zweier harmonischer Größen mit verschiedener Frequenz entsteht zwar eine periodische Schwingung, aber keine Sinusschwingung (harmonische).

2.5. Mittelwerte periodischer Zeitfunktionen

i Arithmetischer Mittelwert - linearer Mittelwert - Gleichwert

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

i Gleichrichtmittelwert

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(\tau)| d\tau \quad (2.2)$$

i Quadratischer Mittelwert - Effektivwert

$$U_{eff} = \sqrt{\overline{u^2(t)}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau} \quad (2.3)$$

2.6. Ideale Netzwerkelemente

Reale Bauteile werden für die Zwecke der Schaltungssimulation durch Ersatzschaltungen aus idealen Netzwerkelementen beschrieben. Für unsere Belange sind dies Zweipole mit genau definierten Strom-Spannungs-Beziehungen sowie gesteuerte Quellen. Für die Beschreibung aktiver Bauelemente werden zusätzlich gesteuerte Quellen benötigt.

Ein *Zweipol* ist ein Schaltungselement mit zwei elektrischen Anschlüssen, den Polen oder Klemmen. Der Strom, der durch die eine Klemme in den Zweipol hineinfließt, ist dabei gleich dem durch die andere Klemme aus dem Zweipol herausfließenden Strom. Ein Zweipol heißt passiv wirkend, wenn er elektrische Energie aufnimmt; gibt er elektrische Energie ab, so wird er als aktiv wirkender Zweipol bezeichnet.

i Widerstand R - Einheit: 1 Ω

Ein Zweipol heißt Widerstand, falls die zwischen seinen Klemmen auftretende Spannung $u(t)$ zu jedem Zeitpunkt durch den Klemmenstrom $i(t)$ bestimmt ist

$$v(t) = v[i(t)].$$

Der Widerstand heißt linear oder ohmsch, falls Spannung und Strom zueinander proportional sind $v(t) = R \cdot i(t)$. (1.3)

Der Proportionalitätsfaktor R heißt Widerstand(swert), sein Kehrwert $G = 1/R$ der Leitwert des Zweipols. Widerstandswerte werden in Ω (Ohm) angegeben, Leitwerte in S (Siemens); dabei gilt $1\Omega = 1 \text{ V/A}$ und $1S = 1/\Omega$.

Wird der durch einen ohmschen Widerstand fließende Strom als Funktion der Spannung aufgetragen, so ergibt sich eine Gerade.

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad (2.4)$$

$$= R \cdot \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (2.5)$$

$$= \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (2.6)$$

$$R = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \, ds}{\iint \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \, dA}$$

i Kapazität C - Einheit: 1 F = 1 C/V = 1 As/V

Ein Zweipol heißt *Kapazität*, falls die in ihm gespeicherte Ladung $q(t)$ zu jedem Zeitpunkt eindeutig durch die zwischen seinen Klemmen anliegende Spannung $u(t)$ bestimmt ist

$$q(t) = q[v(t)].$$

Der durch eine Kapazität fließende Strom $i(t)$ ist gleich der Änderung der Ladung der Kapazität mit der Zeit

2. Netzwerkerregung

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Die Kapazität heißt linear, falls $q(t)$ und $u(t)$ proportional zueinander sind.

$$q(t) = Cu(t). \quad (2.7)$$

Der Proportionalitätsfaktor C wird als Kapazität(swert) bezeichnet. Kapazitätswerte werden in F (Farad) angegeben, wobei gilt $1 \text{ F} = 1 \text{ C} = 1 \text{ As}$. Im Fall der linearen Kapazität (Gleichung 2.7) über in

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2.8)$$

$$= \omega C \cdot \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (2.9)$$

$$= \omega C \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) \quad (2.10)$$

$$C = \frac{q(t)}{u(t)} = \frac{\iint \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) dA}{\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) ds}$$

i Induktivität L - Einheit: $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$

Ein Zweipol heißt *Induktivität*, falls sein Fluß $\varphi(t)$ zur Zeit t eine Funktion des Stroms $i(t)$ ist

$$\varphi(t) = \varphi[i(t)].$$

Die Induktivität heißt linear, falls $\varphi(t)$ und $i(t)$ zueinander proportional sind

$$\varphi(t) = Li(t).$$

Der Proportionalitätsfaktor L heißt Induktivität(-swert). Induktivitätswerte werden in H (Henry) angegeben, wobei gilt $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$.

Die an der Induktivität abfallende Spannung $u(t)$ folgt aus dem Faradayschen Gesetz

$$u(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

und ist für lineare Induktivitäten proportional zur Änderung des Stroms (Spannungs- und Strompfeil gleichgerichtet)

$$u(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.11)$$

$$= \omega L \cdot \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.12)$$

$$= \omega L \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \quad (2.13)$$

$$L = \frac{\varphi(t)}{i(t)} = \frac{\iint \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dA}{\oint \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) ds}$$

3. Komplexe Wechselstromrechnung

3.1. Beschreibung und Analyse im Frequenzbereich

i Problemstellung

Bei zukünftigen Schaltungen ist es nicht mehr möglich, direkt mit den Zeitfunktionen für Spannungen und Ströme zu arbeiten.

Die von den Gleichstromnetzen bekannten Lösungsverfahren aus dem ersten Semester, die von linearen algebraischen Gleichungssystemen ausgehen (Maschen-, Knoten- und andere Verfahren) können nicht übernommen werden.

i Symbolische Verfahren/Methoden

- komplexe Darstellung (analytisches Verfahren)
- Zeigerdarstellung (graphisches Verfahren)
- Wechselstromanalyse
- Betrachtungen beruhen auf der Verwendung sinusförmiger Eingangsgrößen
- Zeitbereich ist physikalische Realität mit gew. und partiellen Differentialgleichung (ODE, PDE)
- Frequenzbereich hat mathematisch-formale Bedeutung

3.2. Symbolisches Verfahren

- Man ordnet nach einer gewissen Regel jeder Sinusgröße eine symbolische Größe zu (z.B. einen Vektor oder eine komplexe Zahl);
- Man schreibt die Differentialgleichungen des Netzwerkes mit den symbolischen Größen;
- Statt die Differentialgleichungen zu lösen, löst man die Gleichungen für die Symbole und bestimmt die unbekannten Größen.
- Man transformiert die gefundenen Symbolgrößen zurück in die gesuchten Sinusgrößen.
- entn. [3]

3.3. Vorteile des Frequenzbereichs

- zeitl. Differentiation und Integration geht über in Multiplikation und Division mit dem Differentialoperator $s = \sigma + j\omega$ (komplexe Frequenz); häufig genügt es sich auf die imaginäre Frequenz $s = j\omega$ zu beschränken.
- u-i-Zusammenhänge des Zeitbereichs → ohmsche Form im Frequenzbereich durch komplexen Widerstands-/Leitwertbegriff
- ODE's gehen über in algebraische Gleichungen
- gleichwertige Darstellung harmonischer Funktionen durch komplexe Größen → Zeiger

3.4. Funktionaltransformation

i Euler'sche Formel

$$\sigma + j\omega = ae^{j\varphi} = a(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$$

$$a = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

i Exponentiendarstellung

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{1}{j2}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

i Transformation

$$f(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \varphi_a) \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\hat{A} e^{j\varphi_a}}_{\text{Phasor}} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \underbrace{\hat{A} e^{-j\varphi_a}}_{\text{Phasor}} e^{-j\omega t} \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{A} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \hat{A}^* e^{-j\omega t} \quad (3.5)$$

$$= \operatorname{Re}\{\hat{A} e^{j\omega t}\} \quad (3.6)$$

$$= \operatorname{Re}\{\hat{A} e^{j\varphi_a} e^{j\omega t}\} \quad (3.7)$$

$$= \operatorname{Re}\{\hat{A} (\cos(\omega t + \varphi_a) + j\sin(\omega t + \varphi_a))\} \quad (3.8)$$

3.4.1. Definitionen

i rotierender Zeiger, komplexer Momentanwert

$$\underline{f}(t) = \hat{A}e^{j\omega t} = \hat{A}e^{j\varphi_a}e^{j\omega t}$$

i ruhender Zeiger, komplexer Scheitelwert, Phasor

$$\underline{f}(0) = \hat{A} = \hat{A}e^{j\varphi_a}$$

i komplexer Effektivwert

$$\underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{A}e^{j\varphi_a}$$

3.5. Zeigerdarstellung

3.5.1. Grundschaltelelemente

- Sinusgröße $i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$
- da alle in einer Schaltung vorkommenden Sinusgrößen (meist) dieselbe Kreisfrequenz ω aufweisen, kann man diese außer Acht lassen und die Zeiger als stehend betrachten;
- Der Faktor 2 in den Scheitelwerten aller Sinusgrößen wird nicht berücksichtigt und man arbeitet mit Effektivwerten, [...], vor allem zur Bestimmung von Leistungen. Man reduziert also die Zeigerlängen im Maßstab $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.5.2. Komplexe Zahlen mit Python

```
# Für mathematische Operationen benötigt man eine Bibliothek:
import cmath, math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Eingabe als Literal
z = 4 + 4j

# Eingabe als Funktion
z = complex(4, 4)

# Berechnung von Betrag und Phase
```

3. Komplexe Wechselstromrechnung

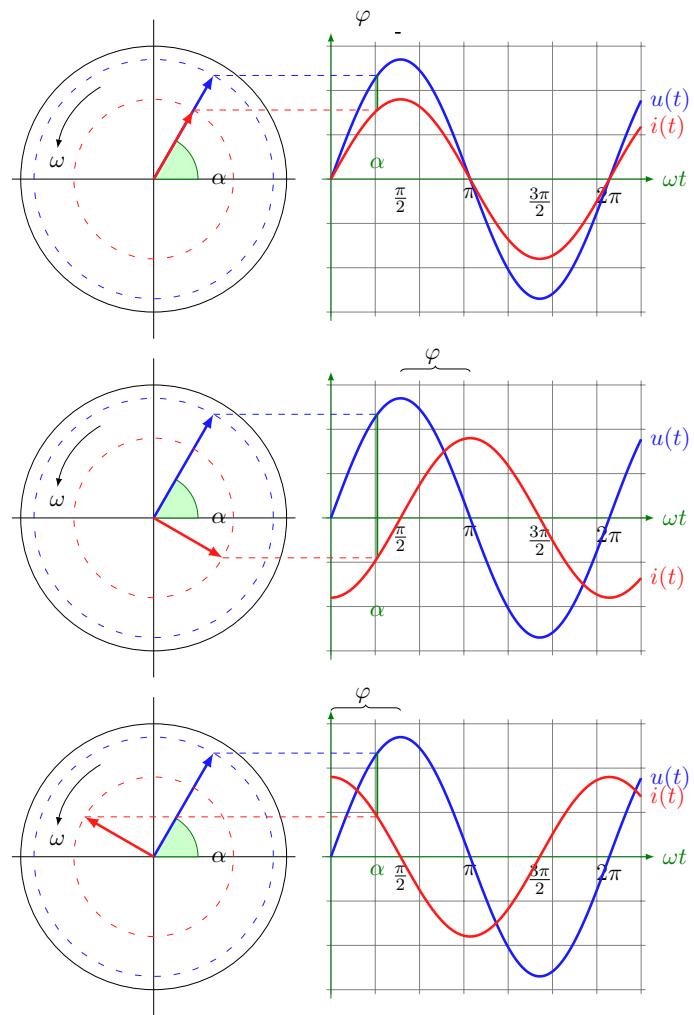


Abbildung 3.1.: Phasor-Diagramm

```
z_abs = abs(z)
z_ph = cmath.phase(z)

print('Betrag =', z_abs)
print('Phase in rad =', z_ph)
print('Phase in Grad =', np.degrees(z_ph))

# Darstellung in der komplexen Ebene
plt.plot(z.real, z.imag, 'x')
```

Betrag = 5.656854249492381
Phase in rad = 0.7853981633974483
Phase in Grad = 45.0

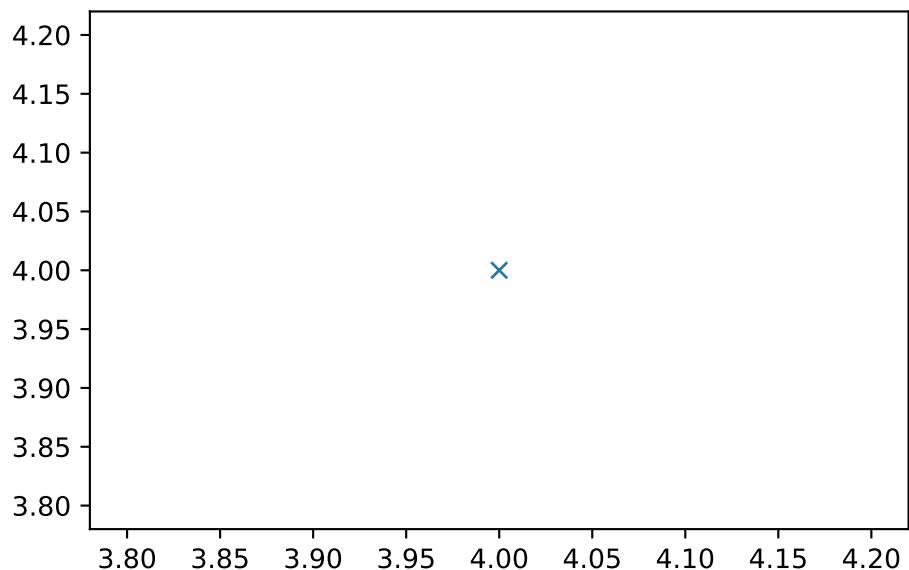


Abbildung 3.2.: Darstellung einer komplexen Zahl

4. Impedanz, Admittanz und Leistung

4.1. Widerstandsoperator

i u/i-Verhalten

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\hat{U}e^{j\omega t}}{\hat{I}e^{j\omega t}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \underline{Z}$$

i Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\hat{U}e^{j\omega t}}{\hat{I}e^{j\omega t}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{\varphi_u - \varphi_i} \quad (4.1)$$

$$= Z e^{j\varphi_z} = Z (\cos(\varphi_z) + j \sin(\varphi_z)) \quad (4.2)$$

$$= \operatorname{Re} \underline{Z} + j \operatorname{Im} \underline{Z} \quad (4.3)$$

i Eigenschaften $= R + jX \quad (4.4)$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{Scheinwiderstand} \quad (4.5)$$

$$R = \operatorname{Re} \underline{Z} \quad \text{Wirkwiderstand (Resistanz)} \quad (4.6)$$

$$X = \operatorname{Im} \underline{Z} \quad \text{Blindwiderstand (Reaktanz)} \quad (4.7)$$

$$\tan(\varphi_z) = \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}}{\operatorname{Re} \underline{Z}} = \frac{X_r}{R_r} \quad (4.8)$$

$$\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i = \arctan \left(\frac{X_r}{R_r} \right) \quad (4.9) \text{ 25}$$

4. Impedanz, Admittanz und Leistung

4.2. Leitwertoperator

i Harmonische Anregung

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \underline{u}(t) = \hat{U} e^{j\omega t} \quad (4.10)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \underline{i}(t) = \hat{I} e^{j\omega t} \quad (4.11)$$

i Admittanz

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{\hat{I} e^{j\omega t}}{\hat{U} e^{j\omega t}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} e^{\varphi_i - \varphi_u} \quad (4.12)$$

$$= Y e^{j\varphi_y} = Y (\cos(\varphi_y) + j \sin(\varphi_y)) \quad (4.13)$$

$$= \operatorname{Re} \underline{Y} + j \operatorname{Im} \underline{Y} \quad (4.14)$$

$$= G + jB \quad (4.15)$$

i Eigenschaften

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \text{Scheinleitwert} \quad (4.16)$$

$$G = \operatorname{Re} \underline{Y} \quad \text{Wirkleitwert (Konduktanz)} \quad (4.17)$$

$$B = \operatorname{Im} \underline{Y} \quad \text{Blindleitwert (Suszeptanz)} \quad (4.18)$$

$$\tan(\varphi_y) = \frac{\operatorname{Im} \underline{Y}}{\operatorname{Re} \underline{Y}} = \frac{B}{G} \quad (4.19)$$

$$\varphi_y = \varphi_i - \varphi_u = \arctan\left(\frac{B}{G}\right) \quad (4.20)$$

4.3. Vergleich von RLC-Netzwerken

$$\text{Zeitbereich : } u = iR \quad u = \frac{1}{C} \int i dt \quad u = L \frac{di}{dt} \quad (4.21)$$

$$\text{Frequenzbereich : } \underline{u} = \underline{i}R \quad \underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \underline{i} \quad \underline{u} = j\omega L \underline{i} \quad (4.22)$$

$$\text{Impedanz : } \underline{Z} = R \quad \underline{Z} = jX_C = -\frac{j}{\omega C} \quad \underline{Z} = jX_L = j\omega L \quad (4.23)$$

$$\text{Phase : } \varphi_Z = 0 \quad \varphi_Z = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_Z = \frac{\pi}{2} \quad (4.24)$$

4.4. Leistung von Wechselsignalen

i Harmonische Anregung

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{\hat{U}} e^{j\omega t} + \underline{\hat{U}}^* e^{-j\omega t}) \quad = \frac{1}{2} (\underline{\hat{I}} e^{j\omega t} + \underline{\hat{I}}^* e^{-j\omega t}) \quad (4.26)$$

$$= \operatorname{Re} \underline{\hat{U}} e^{j\omega t} \quad (4.27)$$

i Komplexe Leistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (4.28)$$

$$= \frac{1}{4} (\underline{\hat{U}} e^{j\omega t} + \underline{\hat{U}}^* e^{-j\omega t}) (\underline{\hat{I}} e^{j\omega t} + \underline{\hat{I}}^* e^{-j\omega t}) \quad (4.29)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} (\underline{\hat{U}} \underline{\hat{I}}^* + \underline{\hat{U}}^* \underline{\hat{I}})}_{\text{zeitunabh. Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{4} (\underline{\hat{U}} \underline{\hat{I}} e^{2j\omega t} + \underline{\hat{U}}^* \underline{\hat{I}}^* e^{-2j\omega t})}_{\text{zeitabh. Anteil}} \quad (4.30)$$

i Definitionen

$$\underline{P} = \frac{1}{4} (\underline{\hat{U}} \underline{\hat{I}}^* + \underline{\hat{U}}^* \underline{\hat{I}}), \quad \text{Momentanwert, konstanter Anteil bzw. linearer Mittelwert, Momentanleistung} \quad (4.31)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \underline{\hat{U}} \underline{\hat{I}}^* \quad (4.32)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \hat{U} \hat{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad (4.34)$$

i Eigenschaften

$$S = |\underline{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{Scheinleistung} \quad (4.35)$$

$$P = \operatorname{Re} \underline{P} \quad \text{Wirkleistung} \quad (4.36)$$

$$Q = \operatorname{Im} \underline{P} \quad \text{Blindleistung} \quad (4.37)$$

5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen in Frequenz- und Zeitbereich

5.1. Bode-Diagramm

“Unter Bode-Diagramm (engl. Bode plot) versteht man eine Darstellung von zwei Funktionsgraphen: Ein Graph zeigt den Betrag (Amplitudenverstärkung), der andere das Argument (die Phasenverschiebung) einer komplexwertigen Funktion in Abhängigkeit von der Frequenz. Diese Art der Darstellung ist nach Hendrik Wade Bode benannt, welcher diese Diagramme bei seinen Arbeiten in den Bell Laboratories in den 1930er Jahren benutzte.” [4]

5.2. Übertragungsfaktor [5]

Ist die Eingangsgröße $x(t)$ eines linearen Netzwerks eine sinusförmige Wechselgröße der Kreisfrequenz ω , in komplexer Schreibweise

$$x(t) = \operatorname{Re}(\hat{X}e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{X}),$$

so gilt dies auch für die Ausgangsgröße

$$y(t) = \operatorname{Re}(\hat{Y}e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{Y}).$$

Das Verhältnis

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$$

der komplexen Zeiger \underline{Y} und \underline{X} wird als *Übertragungsfaktor* des Netzwerks bezeichnet.

Bezeichnet $\underline{H}(j\omega)$ ein Spannungsverhältnis, so spricht man auch von einem Spannungsübertragungsfaktor; dieser wird durch den Index v bzw. u kenntlich gemacht. Der Betrag von $\underline{H}_v(j\omega)$ bei der Frequenz $f = \omega/2\pi$

$$A_v(f) = |\underline{H}_v(j2\pi f)|$$

wird als Spannungsverstärkung bezeichnet.

5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen in Frequenz- und Zeitbereich

Ein Stromübertragungsfaktor – kenntlich gemacht durch den Index i – bezeichnet entsprechend ein Verhältnis (komplexer) Stromamplituden, während ein Leistungsübertragungsfaktor (Index p) ein Verhältnis zweier (komplexer) Leistungsamplituden bestimmt.

Die Phase φ des Übertragungsfaktors ist frequenzabhängig und errechnet sich aus Real- und Imaginärteil von \underline{H} gemäß

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{H}(j\omega))}{\operatorname{Re}(\underline{H}(j\omega))}\right).$$

Aus der Phasenverschiebung folgt die *Phasenlaufzeit*

$$t_{\varphi(\omega)} = \frac{\varphi(\omega)}{\omega};$$

diese bestimmt die *Verzögerung*, die ein unendlich ausgedehntes sinusförmiges Signal der Kreisfrequenz ω beim Durchgang durch das lineare System erfährt. Die Einhüllende eines endlichen Wellenzugs wird dagegen um die *Gruppenlaufzeit*

$$t_g(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega}$$

verzögert.

5.3. Angaben in dB [5]

Der Wert von Spannungs-, Strom- und Leistungsverstärkungen wird häufig als sog. Verstärkungsmaß a in (dezi)Bel dB angegeben. Bei Spannungs- und Stromverstärkungen wird hierzu der (Zehner-)Logarithmus von $A(f)$ mit 20 dB multipliziert. Dies führt im Fall der *Spannungsverstärkung* auf

$$a_v(f) = 20 \text{ dB} \cdot \log(A_v(f))$$

bzw. im Fall der *Stromverstärkung* $A_i(f) = |H_i(j2\pi f)|$ auf

$$a_i(f) = 20 \text{ dB} \cdot \log(A_i(f)).$$

Da $\log(1) = 0$ gilt, liegt allgemein für $a(f) > 0$ dB Verstärkung vor, für $a(f) < 0$ dB Abschwächung.

Soll eine Leistungsverstärkung in dB ausgedrückt werden, so ist der Logarithmus der Leistungsverstärkung $G_p(f) = P_2/P_1$ mit 10 dB zu multiplizieren.

$$a_p(f) = 10 \text{ dB} \cdot \log(G_p(f)).$$

Dabei bezeichnen P_1 und P_2 die Effektivwerte der vom System aufgenommenen bzw. abgegebenen Wirkleistung. Der Hintergrund für den gegenüber a_v und a_i halbierten „Vorfaktor“

von 10 dB ist, daß die Leistung proportional zum Quadrat von Spannungs- bzw. Stromamplitude ist.

Die "Einheit" dB wird für relative Pegelangaben verwendet, d.h. für die Angabe von Verhältnissen. Daneben werden aber auch absolute Pegelangaben in dB vorgenommen, wobei eine feste Bezugsgröße vorgegeben wird. Erwähnt werden soll hier die gebräuchliche "Einheit" dBm, die für Leistungsangaben verwendet wird und den Effektivwert P der Leistung bezogen auf 1 mW angibt P in dBm = $10 \log(P/1 \text{ mW})$.

Der Übertragungsfaktor $H(j\omega)$ ist i.allg. eine komplexwertige Funktion der Frequenz. Für die grafische Darstellung der Frequenzabhängigkeit wird üblicherweise das sog. *Bode-Diagramm* gewählt. Dieses besteht aus zwei Abbildungen: In der einen wird das Verstärkungsmaß a , in der anderen die Phasenverschiebung φ über dem Logarithmus der Frequenz $f = \omega/2\pi$ aufgetragen. Für $A(f)$ wird eine doppeltlogarithmische Auftragung gewählt, da Potenzfunktionen dabei Geraden ergeben: Für beliebige Zahlen $\alpha > 0$ sowie m gilt

$$\log(\alpha f^m) = \log(\alpha) + m \log(f)$$

Wird demnach $y = \log(a)$ über $x = \log(f)$ aufgetragen, so ergibt sich eine Gerade der Steigung m , wodurch sich diese Größe leicht bestimmen lässt: Ein Anstieg der Spannungsverstärkung $A_v \sim f$ ergibt z.B. in doppeltlogarithmischer Auftragung eine Gerade der Steigung +1 bzw. 20 dB/dec, ein Abfall $A_v \sim 1/f$ entsprechend eine Gerade der Steigung -1 bzw. -20 dB/dec. Zeigt a_v einen Abfall von 40 dB/dec, so kann umgekehrt auf eine Frequenzabhängigkeit $\sim 1/f^2$ geschlossen werden.

5.4. Verzögerungszeit und Anstiegszeit [5]

Bezeichnet y_0 den minimalen Wert der Ausgangsgröße eines linearen Netzwerks und y_s ihren Hub, so lässt sich schreiben

$$y(t) = y_0 + y_s f(t),$$

wobei $f(t)$ nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Diese normierte Ausgangsvariable enthält sämtliche Informationen über das Zeitverhalten des Systems. Ein möglicher Verlauf von $f(t)$ als Antwort des Systems auf eine Sprungfunktion am Eingang ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Zur Charakterisierung des Zeitverhaltens werden zwei Zeitkonstanten eingeführt:

1. Die *Verzögerungszeit* t_d , häufig definiert als die Zeit, nach der die Ausgangsgröße die Hälfte ihres Endwerts erreicht hat: $f(t_d) = 1/2$.
2. Die *Anstiegszeit* t_r , oft definiert als der Kehrwert der Steigung von $f(t)$ bei $t = t_d$.

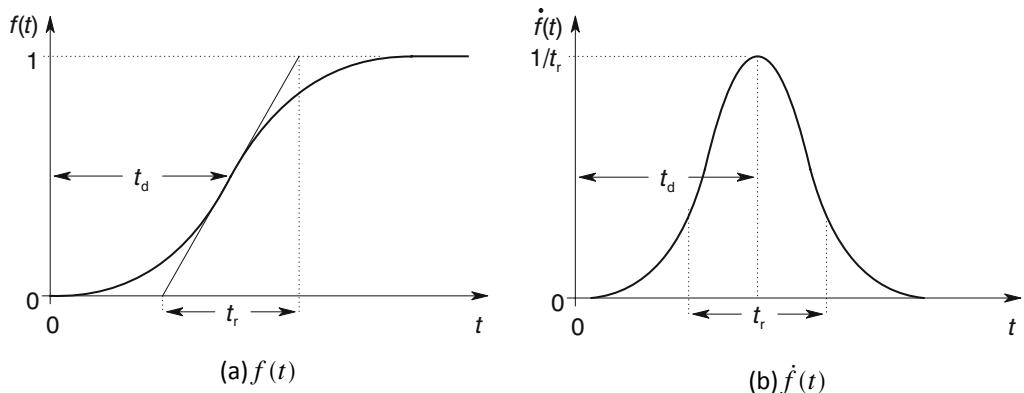


Abbildung 5.1.: Definition von Verzögerungszeit und Anstiegszeit

5.5. Nyquist-Diagramm

“Ein Nyquist-Diagramm, auch als Nyquist-Graph oder Nyquist-Plot bezeichnet, stellt die Ortskurve der Ausgangsgröße eines Regelkreises mit der Frequenz als Parameter dar. Es wird in der Regelungstechnik, Verstärkerkonstruktion und Signalaufbereitung verwendet, um die Stabilität eines Systems mit Rückkopplung zu beschreiben. Benannt ist es nach dem schwedisch-amerikanischen Physiker Harry Nyquist.” [6]

“Passive lineare Schaltungen mit R, L und C an sinusförmigen Signalen sind durch ihre Impedanz, dem Wechselstromwiderstand oder seinem Leitwert, der Admittanz charakterisierbar. Die Schaltungen bilden von der Frequenz abhängige Spannungsteiler, deren Spannungsverlauf im Amplitudenfrequenzgang grafisch darstellbar ist. Die Phasenlage des Ausgangssignals bezogen auf das Eingangssignal kann grafisch im Phasenfrequenzgang gezeigt werden. Beide Darstellungen bilden das komplette Bodediagramm.

Bei gegebenen Bauteilwerten kann für jede Frequenz die Impedanz Z berechnet und als Zeiger in ein Polarkoordinatensystem mit reeller und imaginärer Achse gezeichnet werden. Entsprechend den Achsenparametern gibt die Zeigerlänge dann die Impedanz, Admittanz, Ausgangsspannung oder den Ausgangstrom an. Die Phasenlage ist durch den Winkel des Zeigers mit der reellen Achse bestimmt.

In der Elektronik beschreibt die Systemtheorie unter anderem das Übertragungsverhalten von Signalen. Eine hilfreiche Voraussetzung ist das Rechnen mit komplexen Größen sowie deren Darstellungen im Polarkoordinatensystem oder der [Einführung in die komplexe Gaußschen Zahlenebene. Die oben genannten komplexen Größen sind von den Bauteilwerten abhängig. Die Impedanz Z einer dimensionierten RC- oder RL-Reihenschaltung ist frequenzabhängig. Die Ortskurve ist die Verbindung der errechneten Impedanzwerte in der komplexen Ebene durch einen Kurvenzug mit der Frequenz als Parameter. Die Zeigerlänge vom Nullpunkt zum Kurvenpunkt auf der Ortskurve entspricht dem skalaren Impedanzwert der aktuellen Frequenz. Der Phasenwinkel bezogen auf die Re-Achse zählt linksdrehend positiv und rechtsdrehend negativ. Die Lote vom Zeigerendpunkt auf die Koordinatenachsen ergeben für die jeweilige Frequenz als Achsenabschnitte die Wirk- und Blindkomponente des Systems.]

Entnommen aus Elektrophysik – Spezielle Grundlagen, Ortskurve [7]

i Vergleich zum Zeigerdiagramm

- Zeigerdiagramm nur für konstante Parameter
- Im Zeigerdiagramm keine Aussagen über Auswirkungen von Änderungen der Frequenz oder Schaltelemente
- “Für jeden Wert der Zweipole R , L , und C oder jede Frequenz müssten gesonderte Zeigerdiagramme erstellt werden.”
- “Man verzichtet auf die Darstellung der Zeiger und trägt in der komplexen Zahlenebene nur die Kurve auf.”

5.5.1. Ortskurve einer RC-Schaltung

Mit den Bauteilen $R = 2 \text{ k}\Omega$ und $C = 159 \text{ nF}$ kann eine Reihen- oder Parallelschaltung gebildet werden. Die komplexe Impedanz der Reihenschaltung ist von der Frequenz abhängig und grafisch in der komplexen Ebene als Ortskurve mit der Frequenz als Parameter dargestellt. Die Blindwiderstandswerte wurden für einen bestimmten Frequenzbereich errechnet und im Polarkoordinatensystem eingetragen. Alle Werte liegen im 4. Quadranten auf einer Geraden. Da der ohmsche Widerstand ist von der Frequenz unabhängig ist, verläuft sie parallel zur imaginären Achse im Abstand von $2 \text{ k}\Omega$. Auf die reelle (Re) Achse bezogen ist der Phasenwinkel der Impedanz negativ. Das Diagramm ist mit den angegebenen gerundeten Rechenwerten des Blindwiderstands, der Impedanz und des Phasenwinkels erstellt.

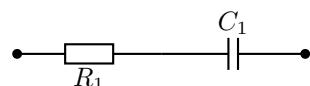


Abbildung 5.2.: RC-Schaltung für eine Ortskurve

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Spezifikation der Impedanz/Admittanz
R = 2e3
C = 156e-9

f = np.linspace(0.2e3, 5e3, 5)
w = 2*np.pi*f

Z = R + 1/(1j*w*C)

# Ortskurve der Impedanz
plt.plot(Z.real, Z.imag, '-x')

```

```
plt.grid()
plt.xlabel(r'Re{Z}')
plt.ylabel(r'Im{Z}')
plt.show()
```

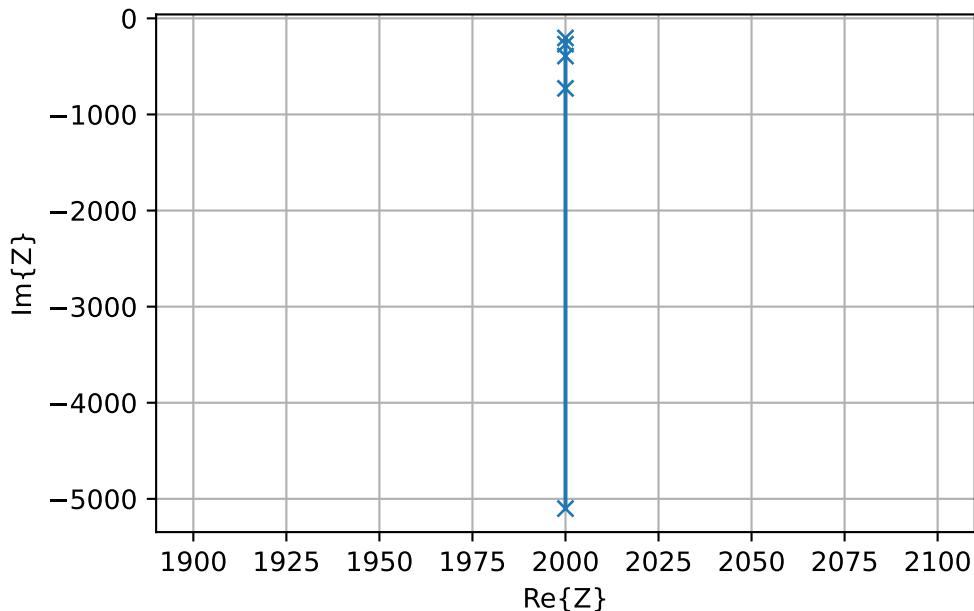


Abbildung 5.3.: Ortskurve RC-Tiefpass

“Die Ortskurve kann auch für die Parallelschaltung von R und C mit der Frequenz als Parameter gezeichnet werden. Im Polardiagramm wird sie durch die Zeiger aller Gesamtleitwerte oder Admittanzen gebildet und verläuft im 1. Quadranten parallel zur imaginären Achse. Die Achsenbezeichnungen der Leitwerte werden in Siemens (S) angeben. Die Phasenwinkel sind auf die reelle (Re) Achse bezogen positiv.” [7]

5.5.2. Inversion von Ortskurven

“Bei der Konstruktion einer Ortskurve ist es oft notwendig von der Widerstandsform $Z(\omega)$ auf die Leitwertsform $\underline{Y}(\omega)$ überzugehen und umgekehrt. Beide Funktionen gehen jeweils aus der Kehrwertbildung der anderen hervor, man nennt sie zueinander inverse Funktionen und die Kehrwertbildung selbst Inversion.” Kap. 5, [8]

Die Inversion der Ortskurve hat als Ergebnis die zur Ausgangsschaltung äquivalente Schaltung. Diese Umrechnung ist immer dann notwendig, wenn es sich um gemischte Reihen- und Parallelschaltungen wie bei T- und Π -Filtern, belasteten Filtern und Schwingkreisen handelt.

Die Ortskurven einfacher RC- und RL-Schaltungen verhalten sich wie folgt:

- Verläuft die Ortskurve der Impedanz oder Admittanz im 1. Quadranten, so befindet sich die dazu invertierte Ortskurve im 4. Quadranten.
- Die Ortskurve der Impedanz einer Reihenschaltung ist eine Parallele zur imaginären Achse im Abstand des ohmschen Widerstandswerts. Die invertierte Ortskurve der Admittanz ist ein im Nullpunkt endender Halbkreis mit dem Durchmesser des reellen Leitwerts.
- Die Ortskurve der Admittanz einer Parallelschaltung ist eine Parallele zur imaginären Achse im Abstand des reellen Leitwerts. Die invertierte Ortskurve der Impedanz ist ein im Nullpunkt endender Halbkreis mit dem Durchmesser des ohmschen Widerstandswerts.
- Inversion eines Punktes (Widerstandsform/Impedanz): $\underline{Z}(5 + 5j)\Omega$
- Maßstäbe $M_Z = 2\Omega/cm$ und $M_Y = 0.1S/cm$
- Leitwertform/Admittanz: $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

$$\underline{Y} = \frac{1}{(5 + 5j)\Omega} = \frac{(5 - 5j)S}{50} = (0.1 - 0.1j)S$$

- Inversion von Ortskurven durch Inversion einzelner Punkte:
 1. In die komplexe Zahlenebene wird der Zeiger Z eingetragen, dessen Spitze invertiert werden soll.
 2. Um den Ursprung des Koordinatensystems wird ein Inversionskreis mit beliebigem Radius r geschlagen.
 3. Von der Spitze des Zeigers Z aus werden Tangenten an den Kreis gelegt, sie ergeben die Berührungs punkte T_1 und T_2 . Die Tangentenpunkte kann man auch finden, wenn man um die Mitte des Zeigers einen Kreis mit dem Radius $Z/2$, d.h. einen Thaleskreis, schlägt (siehe Höhensatz).
 4. Die beiden Punkte T_1 und T_2 werden miteinander verbunden.
 5. Wo die Verbindungs linie den Zeiger Z schneidet, liegt die Spitze des konjugiert komplexen Zeigers Y^* .
 6. Spiegelt man den Zeiger Y^* an der reellen Achse, so erhält man Y . Die Spitze dieses Zeigers entspricht also der invertierten Spitze von Z .
 7. Bezeichnet man die Maßstäbe für den komplexen Scheinwiderstand mit M_Z und den Scheinleitwert mit M_Y sowie die Länge des Zeigers Z mit L_Z und die der Zeiger Y bzw. Y^* mit L_Y^* bzw. L_Y , so ist – da das Dreieck OT1P rechtwinklig ist – nach dem Kathetensatz

5.6. RC-Filter

5.6.1. RC-Tiefpaß [5]

Ein Tiefpaß überträgt sinusförmige Wechselspannungen geringer Frequenz unverändert. Bei hohen Frequenzen bewirkt er eine Abschwächung und Phasenverschiebung. Abbildung 5.4 zeigt für einen Tiefpaß den Verlauf von a_v , der Spannungsverstärkung in decibel (dB) im Bode-Diagramm. In dem bei tiefen Frequenzen vorliegenden Durchlaßbereich ist $a_v \approx 0\text{dB}$; in dem bei hohen Frequenzen vorliegenden Sperrbereich erfolgt ein Abfall, der bei Tiefpaßnetzwerken aus konzentrierten Elementen durch eine Potenzfunktion gegeben ist. Gilt $A_v \sim f^{-m}$, so spricht man von einem Tiefpaß m -ter Ordnung; im Bode-Diagramm entspricht dies einer Geraden der Steigung $-m \cdot 20 \text{ dB/dec}$. Der Übergang zwischen Sperrbereich und Durchlaßbereich wird durch die *Grenzfrequenz* f_g des Tiefpasses markiert; bei dieser weist a_v in guter Näherung den Wert -3 dB auf.

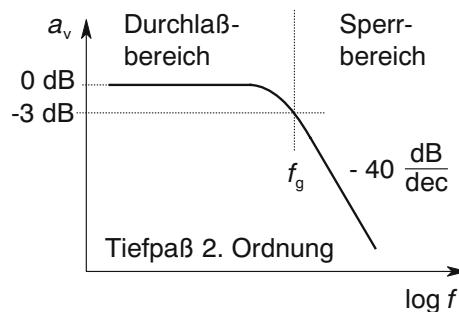


Abbildung 5.4.: Schematisches Bode-Diagramm

Übertragungsverhalten

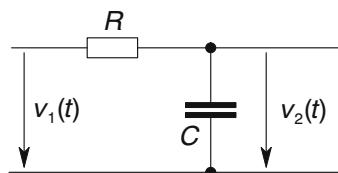


Abbildung 5.5.: RC-Tiefpass

Abbildung 5.5 zeigt die Schaltung eines RC-Tiefpasses. Wird am Eingang eine sinusförmige Wechselspannung $v_1(t) = \text{Re}(\hat{v}_1 e^{j\omega t})$ angelegt, so tritt am Ausgang die Spannung $v_2(t) = \text{Re}(\hat{v}_2 e^{j\omega t})$ auf. Der Spannungsübertragungsfaktor des unbelasteten Tiefpasses ergibt sich aus der komplexen Spannungsteilerformel

$$H_v(j\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{(j\omega C)^{-1}}{R + (j\omega C)^{-1}}$$

Mit der (3 dB-)Grenzfrequenz

$$f_g = 1/(2\pi RC)$$

und $\omega = 2\pi f$ folgt aus #eq- für die Spannungsverstärkung

$$A_v(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_g)^2}}$$

und für die Phasenverschiebung

$$\varphi(f) = -\arctan(f/f_g).$$

Das zugehörige Bode-Diagramm ist in Abbildung 5.6 zu sehen. Für Frequenzen $f \ll f_g$ gilt in guter Näherung $A_v \approx 1$ bzw. $a_v = 0 \text{ dB}$; für Frequenzen $f \gg f_g$ dagegen $A_v(f) \approx f_g/f$. Im Bode-Diagramm entspricht dies einem Abfall von 20 dB/dec, d.h. der betrachtete RC-Tiefpaß ist ein Tiefpaß erster Ordnung. Wird der für große Frequenzen beobachtete Kurvenverlauf im Bode-Diagramm linear zu 0 dB extrapoliert, so liefert der Schnittpunkt mit der 0 dB-Achse die Grenzfrequenz. Dort gilt $A_v = 1/\sqrt{2}$ und $a_v(f_g) = 20 \text{ dB} \cdot \log(1/\sqrt{2}) \approx -3.01 \text{ dB}$, während die Phasenverschiebung den Wert -45° aufweist.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Spezifikation der Impedanz/Admittanz
R = 1e3
C = 100e-9

# Frequenzvektor
f = np.logspace(0, 5, 100)
w = 2*np.pi*f

# Bestimmung der Impedanzen
Z1 = R
Z2 = 1/(1j*w*C)

# Spannungübertragungsfunktion
H_v = Z2 / (Z1 + Z2)

# Bode-Diagramm
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.semilogx(f, 20*np.log10(np.abs(H_v)))
plt.ylabel(r'$|H_v|/\text{dB}$')
plt.grid()

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.semilogx(f, np.rad2deg(np.angle(H_v)))
```

5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen in Frequenz- und Zeitbereich

```
plt.xlabel(r'Frequenz f/Hz')
plt.ylabel(r'arg($H_v$)/deg')
plt.grid()

plt.show()
```

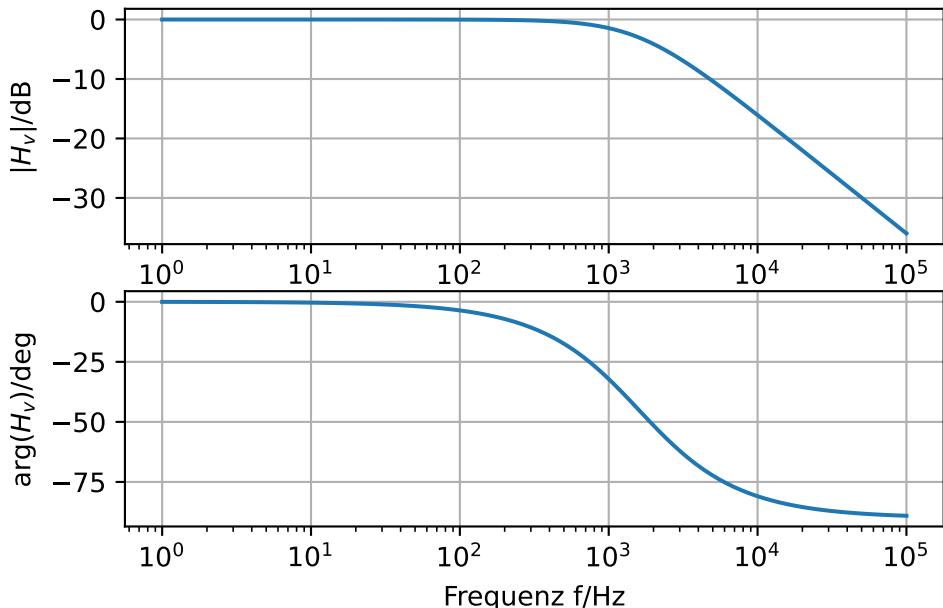


Abbildung 5.6.: Bode-Diagramm RC-Tiefpass

Um in LTspice das Bode-Diagramm des RC-Tiefpasses zu erhalten, muss eine .ac Analyse durchgeführt werden. Diese kann mit Python wie folgt ausgewertet werden:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Auswertung der AC SPICE Analyse der RC-Schaltung
"""

# %% Init
import ltspice
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Laden der RAW LTSpice Daten in den Python-Workspace
file = '../files/spice/lec5rctp.raw'
raw = ltspice.Ltspice(file)
raw.parse()
```

```

# %% AC Analyse
# Daten werden als Numpy-Array geladen, Typ complex
Af = raw.get_data("V(2)")
freq = raw.get_data("frequency")

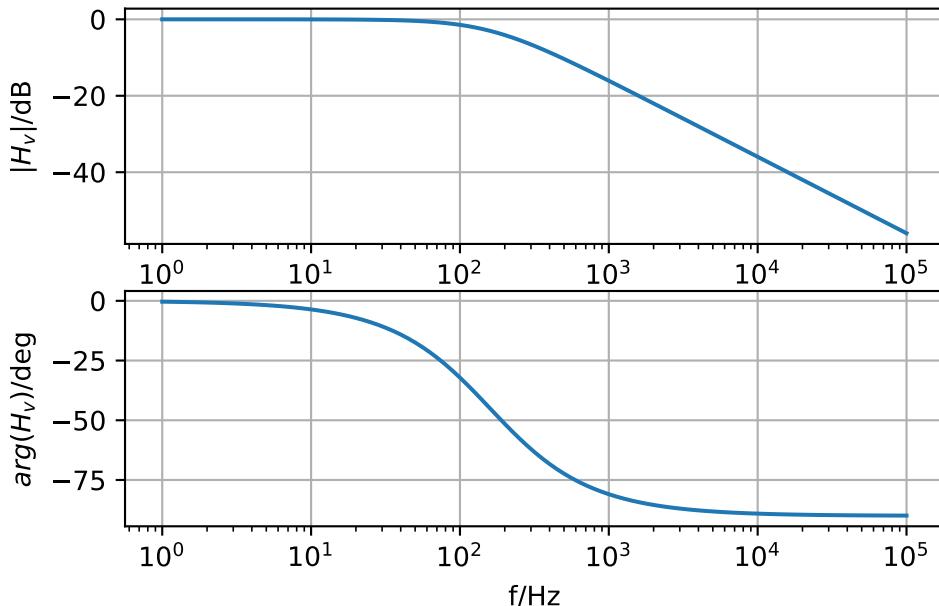
a_dB = 20*np.log10(np.abs(Af)) # Betrag in dB
a_ph = np.rad2deg(np.angle(Af)) # Phase in Grad (engl. degree)
f = freq.real

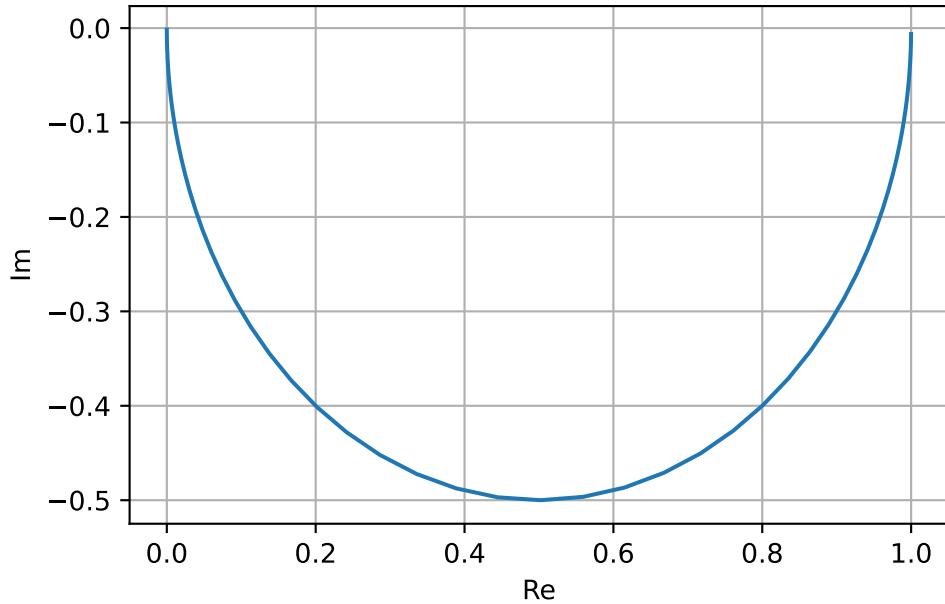
# %% Erzeugen des Bode-Diagramms
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.semilogx(f, a_dB)
plt.ylabel(r'$\lvert H_v \rvert / \text{dB}$')
plt.grid()

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.semilogx(f, a_ph)
plt.ylabel(r'$\arg(H_v) / \text{deg}$')
plt.xlabel('f/Hz')
plt.grid()
plt.show()

# %% Erzeugen der Ortskurve
plt.plot(Af.real, Af.imag)
plt.xlabel(r'Re')
plt.ylabel(r'Im')
plt.grid()
plt.show()

```





Zeitbereich - Impulsverhalten

Für eine Untersuchung des Impulsverhaltens wird die Ausgangsspannung $v_2(t)$ als Funktion von $v_1(t)$ im Zeitbereich bestimmt. Im Fall des unbelasteten Tiefpasses ergibt der Knotensatz angewandt auf den Ausgangsknoten

$$\frac{v_1(t) - v_2(t)}{R} = C \frac{dv_2(t)}{dt}$$

bzw. mit $\tau = RC$, der Zeitkonstante,

$$\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{v_2(t)}{\tau} = \frac{v_1(t)}{\tau}.$$

Als allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung zum Anfangswert $v_2(0)$ resultiert

$$v_2(t) = v_2(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \int_0^t \dot{v}_1(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'.$$

Einschalt- und Ausschaltvorgang. Einfache Spezialfälle sind der *Einschaltvorgang* ($v_2(0) = 0$ und $v_1(t) = V_+$ für $t > 0$) mit dem Ausgangsspannungsverlauf

$$v_2(t) = V_+ \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

und der *Ausschaltvorgang* ($v_2(0) = V_+$ und $v_1(t) = 0$ für $t > 0$) mit dem Ausgangsspannungsverlauf

$$v_2(t) = V_+ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

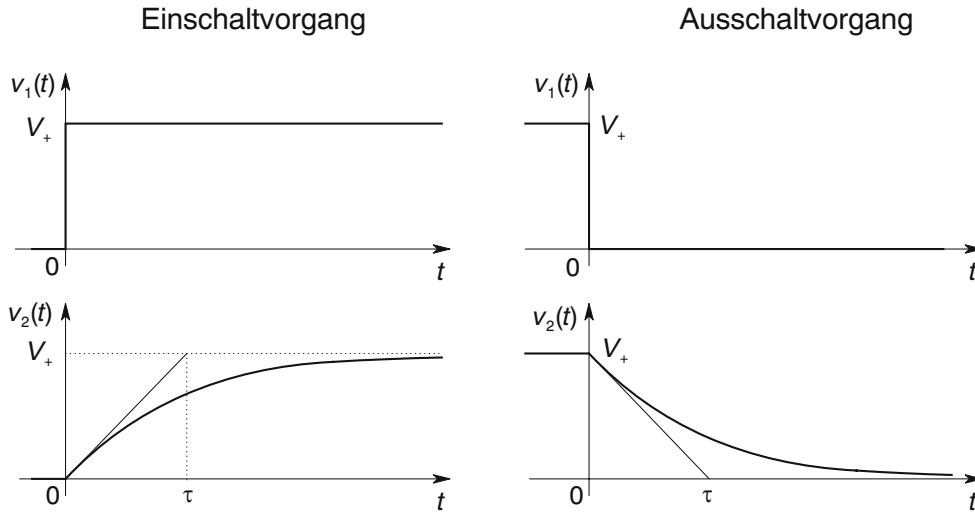


Abbildung 5.7.: Sprungantwort des RC-Tiefpasses

Abbildung 5.7 zeigt für beide Situationen den Verlauf der Spannung an Eingang und Ausgang. Als charakteristische Zeit für das Erreichen des Endwerts dient die *RC-Zeitkonstante* τ ; diese ist gleich der *Verzögerungszeit* t_d des RC-Tiefpasses. Erst für eine Zeitspanne $t > 5\tau$ nach dem Umschaltvorgang ist der Endwert in guter Näherung (Fehler ca. 0.67 %) erreicht.

Anstiegs- und Abfallzeit. Als *Anstiegszeit* t_r wird oft die Zeit bezeichnet, die das Potential am Ausgang bei sprunghafter Änderung der Eingangsspannung benötigt, um von 10% auf 90% seines Endwerts anzusteigen. Aus folgt die Zeit $t_{10\%}$, nach der die Ausgangsspannung 10% des Endwerts V_+ erreicht hat

$$t_{10\%} = -\tau \ln(0.9),$$

sowie die Zeit $t_{90\%}$ nach der $v_2(t)$ 90% des Endwerts erreicht hat

$$t_{90\%} = -\tau \ln(0.1).$$

Die Anstiegszeit $t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$ errechnet sich hieraus zu

$$t_r = \tau \ln(9) \approx 2.2 \cdot \tau \approx 0.35/f_g.$$

Sie ist gleich der Abfallzeit $t_f = t_{10\%} - t_{90\%}$, wie sich durch eine entsprechende Untersuchung des Ausschaltvorgangs leicht zeigen lässt.

Beispielsweise wird ein RC-Tiefpaß mit $R = 150 \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$ mit LTspice betrachtet. Dieser besitzt die Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} = 10.61 \text{ kHz.}$$

Wird auf den Eingang eine rechteckförmige Spannung gegeben

$$v_1(t) = 2.5 \text{ V} + \Delta v_1(t); \quad \Delta v_1(t) = \begin{cases} 2.5 \text{ V} & \text{in der 1. Halbperiode} \\ -2.5 \text{ V} & \text{in der 2. Halbperiode} \end{cases}$$

so stellt sich am Ausgang für $t \gg \tau = 15 \mu\text{s}$ ein periodischer Spannungsverlauf mit dem Gleichanteil 2.5 V und dem Wechselanteil $\Delta v_2(t)$ ein.

Auswertung der LTspice Analyse mit Python:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Auswertung der TRAN SPICE Analyse der RC-Schaltung

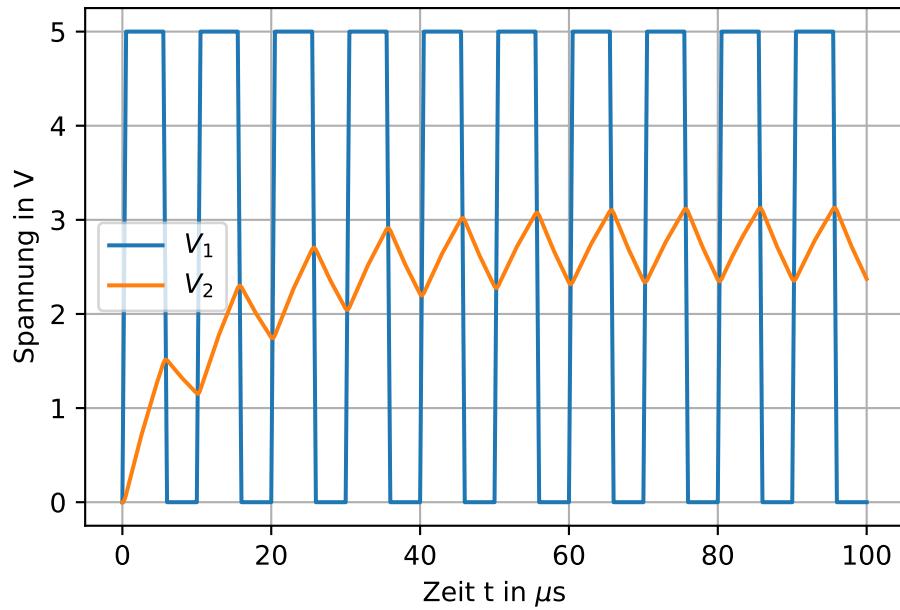
"""

# %% Init
import ltspice
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Laden der RAW LTSpice Daten in den Python-Workspace
file = '../files/spice/bsp133_reisch.raw'
raw = ltspice.Ltspice(file)
raw.parse()

# %% TRAN Analyse
t = raw.get_time()*1e6 # skaliert
V2 = raw.get_data('V(2)')
V1 = raw.get_data('V(1)')

# %% Erzeugen des Plots
plt.plot(t, V1, label=r'$V_1$')
plt.plot(t, V2, label=r'$V_2$')
plt.xlabel(r'Zeit t in $\mu\text{s}$')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



5.6.2. RC-Hochpaß

Ein Hochpaß überträgt sinusförmige Eingangsspannungen hoher Frequenz unverändert. Bei Eingangsspannungen tiefer Frequenz bewirkt er eine Abschwächung und eine Phasenvorausseilung. Abbildung Abbildung 5.9 zeigt schematisch den Verlauf von a_v im Bode-Diagramm für einen Hochpaß. In dem bei tiefen Frequenzen vorliegenden Sperrbereich erfolgt bei Hochpaßnetzwerken aus linearen Elementen ein Anstieg mit einem Vielfachen von 20 dB/dec entsprechend der Ordnung des Hochpasses: Ein Hochpaß der Ordnung k zeigt im Sperrbereich einen Anstieg mit $k \cdot 20 \text{ dB}/\text{dec}$. In dem bei hohen Frequenzen vorliegenden Durchlaßbereich ist $a_v \approx 0 \text{ dB}$. Der Übergang zwischen Durchlaßbereich und Sperrbereich wird durch die Grenzfrequenz f_g des Hochpasses markiert, bei der a_v den Wert -3 dB aufweist.

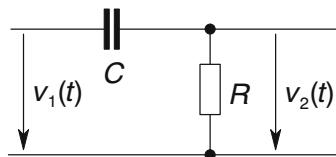


Abbildung 5.8.: RC-Hochpass

Übertragungsfaktor

Für den in Abbildung 5.8 gezeigten RC-Hochpaß ergibt sich aus der Spannungsteilerformel

$$H_v(j\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{R}{R + (j\omega C)^{-1}} = \frac{1}{1 + (j\omega \tau)^{-1}}$$

wobei wiederum $\tau = RC$ gilt.

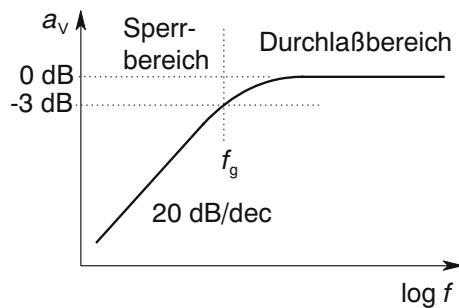


Abbildung 5.9.: Schematisches Bode-Diagramm

Mit der Grenzfrequenz $f_g = (2\pi RC)^{-1}$ resultiert hieraus für Betrag und Phase des Übertragungsfaktors

$$A_v(f) = \frac{f}{f_g} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_g)^2}} \quad (5.1)$$

sowie

$$\varphi(f) = \arctan(f_g/f).$$

Für kleine Frequenzen kann in Gleichung 5.1 für $A_v(f)$ die Frequenzabhängigkeit des Wurzelausdrucks vernachlässigt werden. $A_v(f)$ steigt bei diesen Frequenzen in guter Näherung proportional zur Frequenz an

$$A_v(f) \approx \frac{f}{f_g}; \quad \text{mit } f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

Im Bode-Diagramm (Abbildung 5.10) resultiert für $f \ll f_g$ ein Anstieg mit 20 dB/dec, d.h. es liegt ein Hochpaß 1. Ordnung vor. Für $\omega \tau \gg 1$ bzw. $f \gg f_g$ nähert sich $A_v(f)$ dem Wert 1 (bzw. $a_v \rightarrow 0$ dB); die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal, die bei kleinen Frequenzen 90° beträgt, wird nun zu 0° . Bei der Grenzfrequenz gilt wie beim Tiefpaß $A_v(f_g) = 1/\sqrt{2}$; die Phasenverschiebung zwischen Eingang und Ausgang ist hier jedoch 45° .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Spezifikation der Impedanz/Admittanz
R = 1e3
C = 100e-9

# Frequenzvektor
f = np.logspace(0, 5, 100)
w = 2*np.pi*f
```

```

# Bestimmung der Impedanzen
Z1 = R
Z2 = 1/(1j*w*C)

# Spannungübertragungsfunktion
H_v = Z1 / (Z1 + Z2)

# Bode-Diagramm
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.semilogx(f, 20*np.log10(np.abs(H_v)))
plt.ylabel(r'$|H_v|/\text{dB}$')
plt.grid()

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.semilogx(f, np.rad2deg(np.angle(H_v)))
plt.xlabel('Frequenz f/Hz')
plt.ylabel(r'$\arg(H_v)/\text{deg}$')
plt.grid()

plt.show()

```

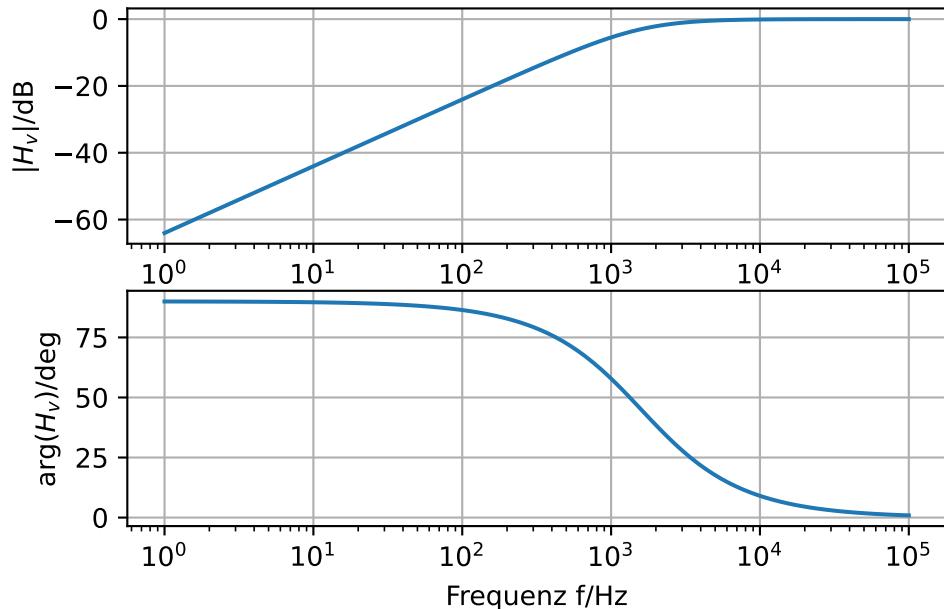


Abbildung 5.10.: Bode-Diagramm RC-Hochpass

Impulsverhalten

Die Analyse des Impulsverhaltens wird wie beim Tiefpaß im Zeitbereich durchgeführt. Der Knotensatz liefert (im unbelasteten Fall) für den Ausgangsknoten

$$C \frac{d}{dt} (v_1 - v_2) = \frac{v_2}{R}$$

bzw. mit $\tau = RC$

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{\tau} = \frac{dv_1}{dt} = \dot{v}_1.$$

Die Lösung zum Anfangswert $v_2(0)$ ist in diesem Fall

$$v_2(t) = v_2(0^+) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \int_{0^+}^t \dot{v}_1(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'. \quad (5.2)$$

Einschalt- und Ausschaltvorgang. Als einfache Spezialfälle werden der Einschaltvorgang und der Ausschaltvorgang betrachtet. Beim Einschaltvorgang springt \$v_1\$ bei $t = 0$ vom Wert 0 auf den Wert V_+ . Da die Spannung über der Kapazität dabei erhalten bleibt ($v_C(0+) = v_C(0-) = 0$), folgt $v_2(0+) = V_+$. Wegen der für $t > 0$ konstanten Eingangsspannung $v_1(t)$, gilt $v'_1(t) = 0$ für alle Zeiten $t > 0$. Aus diesem Grund verschwindet das Integral in (1.75) und der Ausgangsspannungsverlauf ergibt sich zu

$$v_2(t) = V_+ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Das Verhalten beim *Ausschaltvorgang* folgt auf analoge Weise. Hier war die Kapazität vor dem Sprung der Eingangsspannung auf die Spannung V_+ aufgeladen, d.h. hier gilt direkt nach dem Umschalten $v_2(0+) = -V_+$. Aus Gleichung 5.2 folgt so der Ausgangsspannungsverlauf

$$v_2(t) = -V_+ \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Abbildung 5.11 zeigt für beide Situationen den Verlauf der Spannung an Eingang und Ausgang. Als charakteristische Zeit für das Erreichen des jeweiligen Endwerts dient auch hier $\tau = RC$.

Beispielsweise wird mit LTspice auf den Eingang eines RC-Hochpasses mit $R = 150 \Omega$, $C = 150 nF$, $f_g = 10.61 kHz$ eine Dreiecksspannung gegeben, so ist bei steigender Flanke

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{5V}{0.5 ms} = 10^4 V/s$$

und bei fallender Flanke

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{-5V}{0.5 ms} = -10^4 V/s.$$

Da die Frequenz der Eingangsspannung klein ist gegenüber der Grenzfrequenz des Hochpasses, wird am Ausgang eine symmetrische Rechteckspannung erwartet: Die Ableitung einer Geraden ergibt eine Konstante. Mit $RC = 15 \text{ } \mu s$ folgt für die Ausgangsspannung

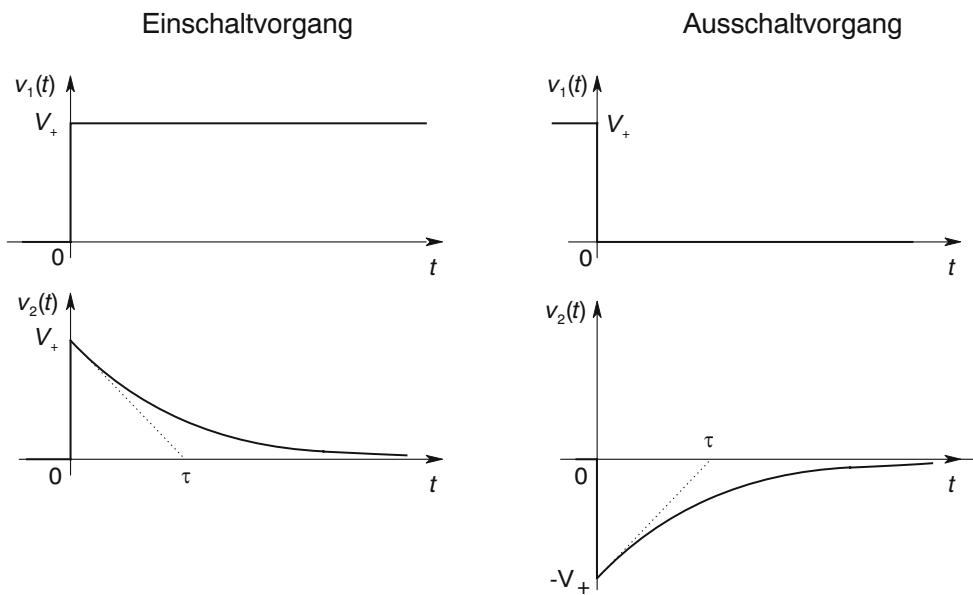


Abbildung 5.11.: Sprungantwort des RC-Hochpasses

$$v_2 \approx \tau \frac{dv_1}{dt} = \begin{cases} 150 \text{ mV} & \text{bei steigender Flanke} \\ -150 \text{ mV} & \text{bei fallender Flanke.} \end{cases}$$

Auswertung der LTspice Analyse mit Python:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Auswertung der TRAN SPICE Analyse des RC-Hochpasses
"""

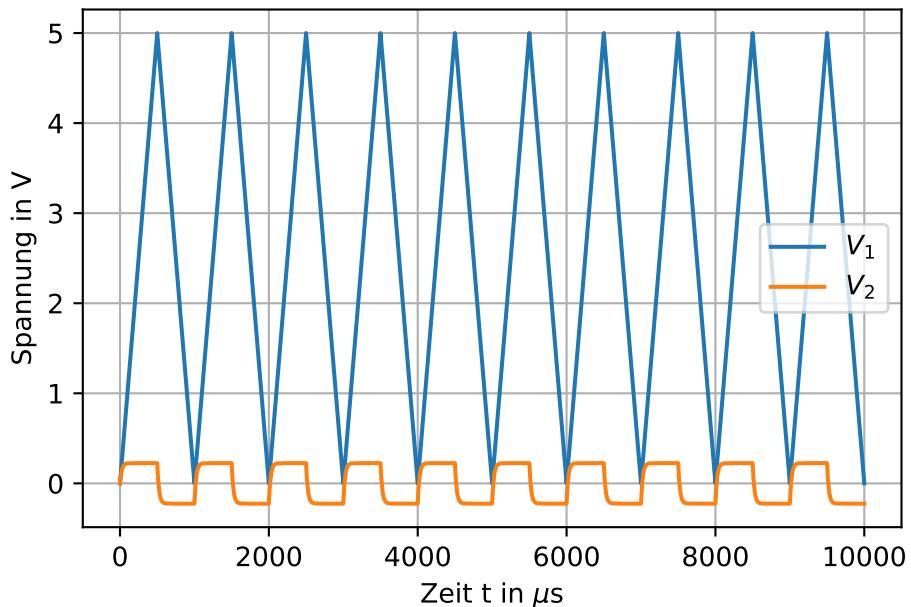
# %% Init
import ltspice
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Laden der RAW LTSpice Daten in den Python-Workspace
file = '../files/spice/bsp134_reisch.raw'
raw = ltspice.Ltspice(file)
raw.parse()

# %% TRAN Analyse
t = raw.get_time()*1e6 # skaliert
V2 = raw.get_data('V(2)')
V1 = raw.get_data('V(1)')

# %% Erzeugen des Plots
```

```
plt.plot(t, V1, label=r'$V_1$')
plt.plot(t, V2, label=r'$V_2$')
plt.xlabel(r'Zeit t in $\mu s$')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



5.6.3. RC-Bandpaß

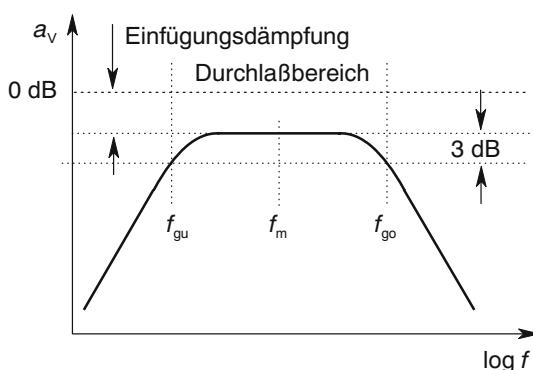


Abbildung 5.12.: Bode-Diagramm eines Bandpasses

“Besitzt ein Netzwerk sowohl bei hohen als auch bei tiefen Frequenzen einen Sperrbereich und bei mittleren Frequenzen einen Durchlaßbereich, so liegt ein Bandpaß vor. Der prinzipielle Verlauf der Spannungsverstärkung a_v ist im Bode-Diagramm Abbildung 5.12 skizziert.

Die Grenzen des Durchlaßbereichs werden nach unten durch die untere Grenzfrequenz f_{gu} und nach oben durch die obere Grenzfrequenz f_{go} bestimmt. Die Differenz $B = f_{go} - f_{gu}$ heißt Bandbreite (engl. bandwidth) des Bandpasses; das geometrische Mittel

$$f_m = \sqrt{f_{gu}f_{go}}$$

der beiden Grenzfrequenzen wird als Bandmittelfrequenz bezeichnet. Bei logarithmisch unterteilter Frequenzskala liegt f_m genau in der Mitte zwischen f_{gu} und f_{go} . Ein Bandpaß heißt schmalbandig, falls $B \ll f_m$ gilt; als Maß gilt die relative Bandbreite B/f_m . Die Abschwächung des Signals bei der Bandmittelfrequenz wird als Einfügungsämpfung bezeichnet.“ [5]

“Die als Wien-Glied bezeichnete Schaltung ist ein spezieller RC-Bandpass. Im Wien-Robinson-Generator bestimmt dieses Filter die Ausgangsfrequenz. Er generiert Sinusfrequenzen mit sehr geringem Klirrfaktor. Im durchstimmbaren Sinusgenerator sind die beiden Widerstände durch gemeinsam einstellbare Potentiometer ersetzt. Diese Anordnung gibt es auch in Wechselstrom-Brückenschaltungen.“ [7]

5.7. Messbrücken

5.7.1. Wheatstone-Messbrücke – Gleichstrommessbrücke

Zwei mögliche Messverfahren:

1. Ausschlagverfahren Brückenspannung U_D wird mit hochohmigem Messinstrument gemessen.
2. Abgleich- oder Nullverfahren Brückenspannung U_D wird zu Null abgeglichen.

5.7.2. Wechselstrommessbrücke

- Abgleichbedingung

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3$$

- Zerlegung in Betrag und Phase

$$|\underline{Z}_1||\underline{Z}_4| = |\underline{Z}_2||\underline{Z}_3| \quad (5.3)$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \quad (5.4)$$

- Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$R_1R_4 - X_1X_4 = R_2R_3 - X_2X_3 \quad (5.5)$$

$$X_1R_4 + R_1X_4 = X_2R_3 + R_2X_3 \quad (5.6)$$

- zwei Bedingungen \Rightarrow zwei abgleichbare Elemente

5.7.3. Wien-Robinson-Brücke – einfaches Frequenzmessgerät

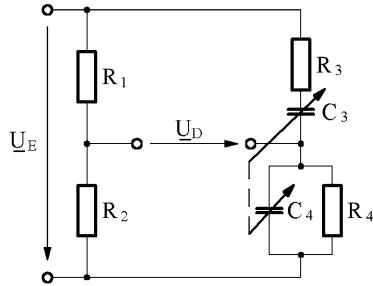


Abbildung 5.13.: Wien-Robinson-Brücke

“Brücken mit frequenzabhängigem Abgleich, wie die Wien-Robinson-Brücke in Abbildung 5.13, können als einfache Frequenzmessgeräte genutzt werden. Die Abgleichbedingungen der Wien-Robinson-Brücke lauten

$$\frac{C_4}{C_3} = \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} \quad (5.7)$$

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{1}{\omega^2 R_3 R_4}. \quad (5.8)$$

Häufig wählt man $R_2 = R_3 = R_4 = R$, $R_1 = 2R$ und $C_3 = C_4 = C$. Damit ist Gleichung 5.7 automatisch erfüllt, während Gleichung 5.8 eine neue Abgleichbedingung ergibt, aus der die Frequenz ω der Brückeneingangsspannung ermittelt werden kann

$$\omega = \frac{1}{RC}.$$

[9] [10] [11] [12]

6. Schwingkreise

i Schwingungen (phys.)

“Schwingungen begleiten uns im Alltag wörtlich auf Schritt und Tritt: In jeder Uhr findet eine Schwingung statt, die zur Zeitmessung verwendet wird. Das fängt bei dem Pendel der almodischen Pendeluhr an und endet nicht bei der modernen Quarzuhr, in der ein kleines Quarzplättchen mechanische Schwingungen vollführt. Der Prozessor Ihres Smartphones erhält seinen elektrischen Takt ebenfalls von einem solchen Schwingquarz. Wenn wir sprechen, schwingen die Stimmlippen in unserem Kehlkopf und verursachen so den primären Schall, der unsere Stimme formt. Mechanische Konstruktionen und Bauwerke können ebenfalls in Schwingungen geraten, wenn eine äußere Kraft auf sie einwirkt, was in vielen Fällen unerwünscht ist. Auch in elektronischen Systemen finden Schwingungen statt. Hier ändert sich nicht eine mechanische Auslenkung als Funktion der Zeit, sondern eine elektrische Spannung oder ein elektrischer Strom.

Sehr viele Phänomene, die bei schwingenden Systemen auftreten, kann man exemplarisch an einfachen mechanischen Systemen studieren. In den einführenden Physikbüchern wird sich dabei meist auf lineare Systeme beschränkt, die zu harmonischen Schwingungen führen. Eine Schwingung bezeichnet man als harmonisch, wenn sie sich durch eine reine Sinus- oder Kosinusfunktion beschreiben lässt. Die Auslenkung $x(t)$ bei einer harmonischen Schwingung lässt sich durch

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

beschreiben. Dabei bezeichnet \hat{x} die Amplitude der Schwingung, φ ist der Phasenwinkel und ω die Kreisfrequenz der Schwingung, die mit der Frequenz f über den Faktor 2π verknüpft ist.

Für die Beschränkung auf harmonische Schwingungen gibt es zwei Gründe: Zum einen lassen sich solche linearen Systeme gut analytisch behandeln, und zum anderen lassen sich viele nichtlineare Systeme für hinreichend kleine Auslenkungen gut durch entsprechende lineare Systeme annähern. Für die Behandlung von schwingungsfähigen Systemen mit dem Computer bieten sich zwei Aspekte besonders an: Wir können die Effekte der linearen Schwingungsphysik visualisieren und zum Teil auch hörbar machen, um damit ein intuitiveres Verständnis dieser Phänomene zu gewinnen. Darüber hinaus bieten uns die in diesem Buch bereits besprochenen Verfahren die Möglichkeit, auch nichtlineare Schwingungen zu untersuchen.” Entn. [13]

6. Schwingkreise

i Schwingkreise (elek.)

“Eine physikalische Anordnung ist schwingungsfähig, wenn sie mindestens zwei Energiespeicher unterschiedlichen physikalischen Charakters enthält, die miteinander Energie austauschen können. Eine solche Anordnung wird als Schwingkreis bezeichnet. In elektrischen Schaltungen sind diese unterschiedlichen Typen von Energiespeichern Induktivitäten, die magnetische Feldenergie speichern und Kapazitäten zur Speicherung elektrischer Feldenergie.

Die in einer Kapazität gespeicherte Energie wird durch den Wert C der Kapazität und die Spannung u an der Kapazität bestimmt, die in einer Induktivität gespeicherte Energie durch den Wert L der Induktivität und den Strom i durch die Induktivität.

Zu unterscheiden ist zwischen freien und erzwungenen Schwingungen. Bei freien Schwingungen [...] wird einer physikalischen Anordnung einmalig Energie zugeführt und sie sich dann selbst überlassen. Durch unvermeidliche Verlustmechanismen, die dazu führen, dass im Schwingkreis pendelnde Energie in Wärme umgesetzt wird, klingt die Schwingung zeitlich ab. Bei erzwungenen Schwingungen [...] wird einer zunächst energielosen Anordnung periodisch von außen Energie zugeführt. Ein Teil dieser Energie wird zur Kompensation der mit der Schwingungsintensität ansteigenden Verluste benötigt, der Rest pendelt zwischen den Energiespeichern. Ändert sich die Art der periodischen Energiezufuhr nicht, so stellt sich nach einem Einschwingvorgang in der Anordnung eine stationäre Schwingung (eingeschwungener Zustand) ein.” Entn. [14]

6.1. Zusammenfassung der physikalische Grundlagen

- Periodische Zustandsänderung in einem physikalischen System
- Periodischer Energieaustausch zw. zwei unterschiedlichen Energiespeichern (potentiellen und kinetischen), z.B. Feder und Masse, Induktivität und Kapazität
- Maßgebende Zustandsgröße $x(t)$, z.B. Auslenkung, Spannung oder Ladung, folgen einer gewöhnlichen Differenzialgleichung (DGL).

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (6.2)$$

- Harmonische Schwingung, $x(t + T_0) = x(t)$, wobei T_0 Periode, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{1}{T_0}$ Eigenfrequenz und f_0 Resonanzfrequenz
- Zusammenschaltung von Induktivität L und Kapazität C heißt (idealer) Schwing- oder Resonanzkreis

Beide bestimmen die *momentane Speicherenergie* in Kondensator und Spule:

$$W_C(t) = W_{pot}(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t) = \frac{1}{2}Cv_C(0) \cos^2(\omega_0 t) \quad (6.3)$$

$$W_L(t) = W_{kin}(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t) = \frac{1}{2}L\omega_0^2 C^2 v_C^2(0) \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(0) \sin^2(\omega_0 t) \quad (6.4)$$

- *Energiesatz: Erhalt der gespeicherten Gesamtenergie*

$$W_C(t) + W_L(t)|_{\omega_0} = \frac{1}{2}Cv_C^2(0) (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = W_{ges} = const.$$

- Eigenfrequenz des idealen Schwingkreises, *Thomsonformel*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

6.2. Energiependel

aus [15], Kap. 3.2.3

“Der ständige Energieaustausch zwischen Kondensator und Spule folgt aus den verkoppelten Strom-Spannungsbeziehungen: die Kondensatorspannung u_C hat den Höchstwert bei Stromnulldurchgang und umgekehrt. Deshalb wechseln die Höchstwerte ständig nacheinander.”

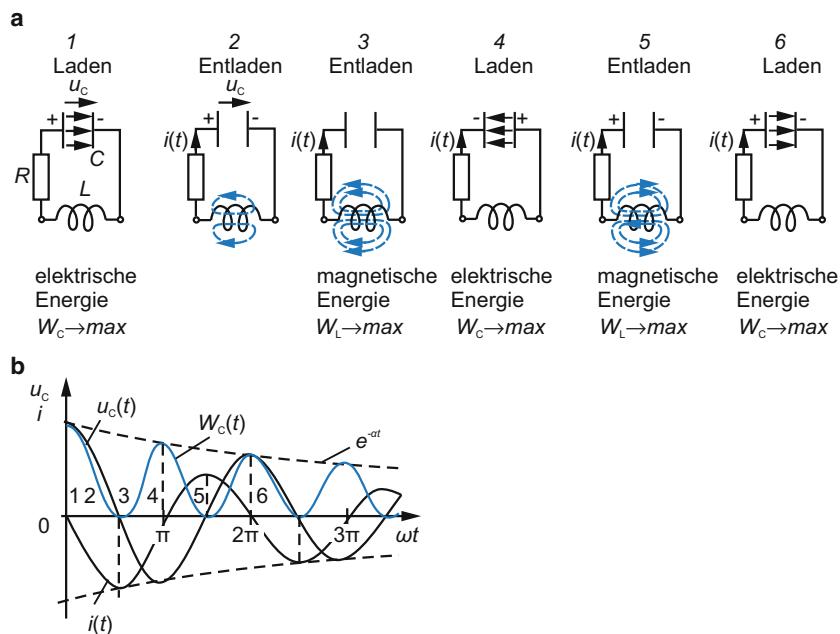


Abbildung 6.1.: Energiependel im Schwingkreis

“Beide Energieformen pulsieren je mit doppelter Resonanzfrequenz ω_0 zeitversetzt um $\pi/2$ (durch $\cos^2(\omega_0 t)$) um einen zeitlichen Mittelwert [...].”

6. Schwingkreise

“Damit tragen die mittleren Kondensator- und Spulenenergien je zur Hälfte zur gesamten Speicherernergie im idealen LC -System bei der Eigenfrequenz $\omega = \omega_0$ (nur hier!) bei:

- *Physikalische Resonanzbedingung*

$$\overline{W_C(t)} = \overline{W_L(t)} = \frac{W_{ges}}{2}$$

- *Gütemaß (Kreisgüte, Resonanzschärfe)*

Zur Kennzeichnung der Verluste im Schwingungssystem eignet sich das Verhältnis der Speicherernergie (bei Resonanz) zur Verlustenergie je Periode. Wir definieren dafür die *Kreisgüte Q* oder *Resonanzschärfe ϱ*

$$\varrho = Q = \left. \frac{2\pi \cdot \text{gesamte Speicherernergie}}{\text{Verlustenergie je Periode}} \right|_{\omega_0} = \frac{\omega_0 \cdot \text{gesamte Speicherernergie}}{\text{Verlustleistung}}$$

Daraus folgt für *Reihen- und Parallelschwingkreis* gleichwertig:

- Reihenkreis

$$\varrho = Q = \left. \frac{2\pi W_{ges}}{T \cdot P} \right|_{\omega_0} = \left. \frac{2\pi L I^2}{T \cdot R \cdot I^2} \right|_{\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Parallelkreis

$$\varrho = Q = \left. \frac{2\pi C U^2}{T \cdot G \cdot U^2} \right|_{\omega_0} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

6.3. RLC-Reihenschwingkreis (aktiver Zweipol)

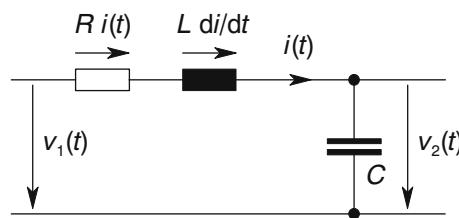


Abbildung 6.2.: RLC-Reihenschwingkreis

i Maschengleichung (Zeitbereich)

$$v_1(0) = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int idt \quad (6.5)$$

$$0 = \frac{di}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i \quad (6.6)$$

i Lösung der Differentialgleichung

$$i(t) = I_0 e^{-d\omega_0 t} \underbrace{\sin(\sqrt{1-d^2}\omega_0 t)}_{\text{Dämpfung harm. Schwingung}}$$

i Spannungsübertragungsfaktor

$$\underline{H}_v(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC + \omega^2 LC} \quad (6.7)$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (6.8)$$

- Eigenfrequenz / Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Abklingkonstante $\delta = \frac{R}{\omega_0 L}$
- Güte $Q = \frac{|Q(\omega_0)|}{P(\omega_0)} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0}{2\delta}$

„Für Schwingkreise mit einem Freiheitsgrad ist die *Güte* Q definiert als das Verhältnis des Betrages der bei Resonanz in einem der beiden Blindelemente umgesetzten, also innerhalb des Schwingkreises pendelnden Blindleistung Q zur aufgenommenen Wirkleistung P .

Die Bildung des Betrages der Blindleistung ist erforderlich, damit sowohl die in der Induktivität als auch die in der Kapazität umgesetzte Blindleistung eingesetzt werden können und das Ergebnis unabhängig vom bei der Leistungsberechnung verwendeten Zählpfeilsystem ist.“

- Dämpfung / Verlustfaktor $d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{2\delta}{\omega_0}$
„Der Kehrwert der Güte ist der *Verlustfaktor*, der bei Schwingkreisen auch als die *Dämpfung* bezeichnet wird.“

[[5]][16] [14]

```
import ltspice
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

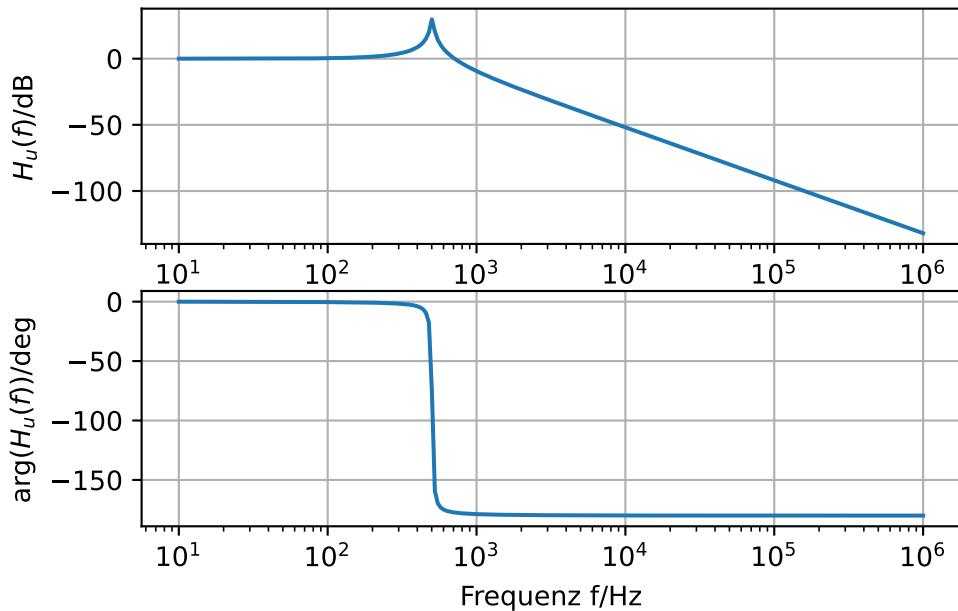
6. Schwingkreise

```
# %% Laden der RAW LTspice Daten in den Python-Workspace
file = "../files/spice/kap137_reisch.raw"
data = ltspice.Ltspice(file)
data.parse()

# %% Zuweisen der Simulationdaten an lokale Variablen
Hu = data.get_data("v(vo)")
freq = data.get_data("frequency")

# %% Daten werden als Numpy-Array geladen, Typ complex
Hu_dB = 20*np.log10(np.abs(Hu))
Hu_arg = 180 / np.pi * np.angle(Hu)
f = freq.real

# %% Erzeugen des Bode-Diagramms (Plot)
fig1 = plt.figure(1)
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.semilogx(f, Hu_dB)
plt.grid()
plt.ylabel(r'$H_u(f)$/dB')
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.semilogx(f, Hu_arg)
plt.ylabel(r'arg($H_u(f)$)/deg')
plt.xlabel('Frequenz f/Hz')
plt.show()
```



6.4. Grundeigenschaften von Reihen- und Parallelschwingkreis (passiver Zweipol)

i Resonanzfrequenz

- Thomsonformel

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_r C_r}} = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}}$$

Reihenschwingkreis Parallelschwingkreis

- bei Resonanz erreichen Impedanz und Admittanz des Reihen- bzw. Parallelschwingkreises ein Minimum

i Reihenkreis (Impedanz)

$$\underline{Z}|_{\omega_0} \Rightarrow |\underline{Z}| = R_r \quad (6.9)$$

$$\underline{Z} = R_r + j \left(\frac{|Y|}{\omega L_r} - \frac{G_p}{\omega C_r} \right) \quad (6.10)$$

$$= R_r + j X(\omega) \quad (6.12)$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R_r^2 + X^2(\omega)} \quad \begin{matrix} B(\omega) \\ \text{Betrag} \end{matrix} \quad (6.13)$$

$$\begin{matrix} \omega < \omega_0 \\ \text{kapazitiv} \end{matrix} \quad \begin{matrix} X(\omega) \\ \text{induktiv} \end{matrix} \quad (6.14)$$

57

$$\arg \underline{Z}_{\bar{\omega}_0} = \arctan \frac{X(\omega)}{R_r} \quad \begin{matrix} \text{induktiv} \\ \text{kapazitiv} \end{matrix}$$

6. Schwingkreise

i Parallelkreis (Admittanz)

$$\underline{Y} = G_p + j \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \quad (6.16)$$

$$= G_r + jB(\omega) \quad (6.17)$$

$$|\underline{Y}| = \sqrt{G_p^2 + B^2(\omega)} \quad \text{Betrag} \quad (6.18)$$

$$\arg \underline{Y} = \arctan \frac{B(\omega)}{G_p} \quad \text{Phase} \quad (6.19)$$

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{Güte} \quad (6.20)$$

6.5. Vereinheitlichte Kennzeichnung

i Verstimmung v , relative Frequenzabweichung

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad (6.21)$$

i Normierte Darstellung

$$\underline{Z} = R \left(1 + j \frac{1}{R} \left(\frac{\omega_0 \omega L}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 \omega C} \right) \right) \quad (6.22)$$

$$= R(1 + Qv) \quad (6.23)$$

$$Y = G(1 + jQv) \quad (6.24)$$

i Betrag und Phase

$$\frac{|\underline{Z}|}{R} = \frac{|\underline{Y}|}{G} = \sqrt{1 + (Qv)} \quad (6.25)$$

$$\varphi_Z = \varphi_Y = \arctan(Qv) \quad (6.26)$$

i 45° -, $\frac{\pi}{4}$ - oder 3dB-Frequenz

Der Phasenwinkel φ ist gleich 45° und Betrag der Blindkomponente ist gleich der Wirkkomponente.

6.6. Gegenüberstellung der Eigenschaften der elementaren Schwingkreise

$$|X(\omega_{\pm 45})| = \pm R \quad |B(\omega_{\pm 45})| = \pm G \quad (6.27)$$

$$\omega_{\pm 45} L - \frac{1}{\omega_{\pm 45} C} = \pm R \quad \omega_{\pm 45} C - \frac{1}{\omega_{\pm 45} L} = \pm G \quad (6.28)$$

$$\omega_{\pm 45} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q} \right)^2} \pm \frac{1}{2Q} \right) \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) \quad (6.29)$$

$$\underline{|Z(\omega_{\pm 45})|} = \sqrt{2}R \quad \underline{|Y(\omega_{\pm 45})|} = \sqrt{2}G \quad (6.30)$$

\$\$

i Bandbreite BW (bandwidth)

$$BW = \omega_{45} - \omega_{-45} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (6.31)$$

$$= f_{45} - f_{-45} = \frac{f_0}{Q} \quad (6.32)$$

$$(6.33)$$

6.6. Gegenüberstellung der Eigenschaften der elementaren Schwingkreise

Entn. aus [14]

6. Schwingkreise

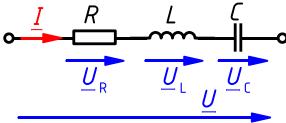
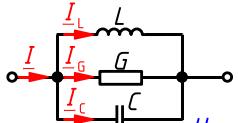
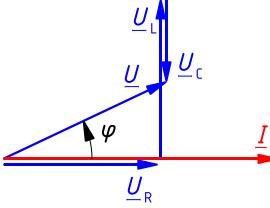
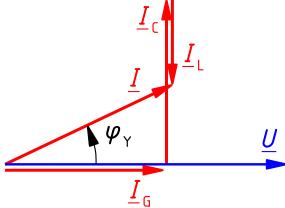
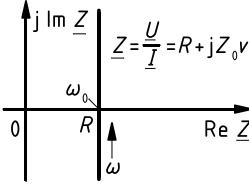
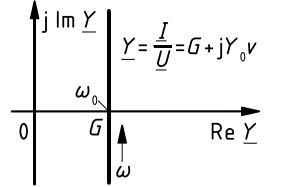
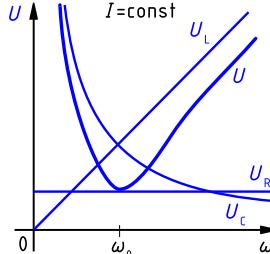
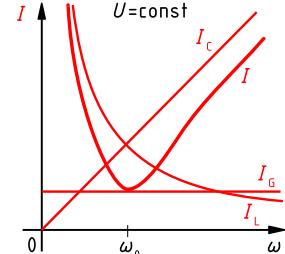
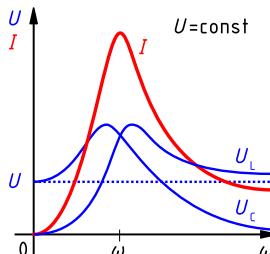
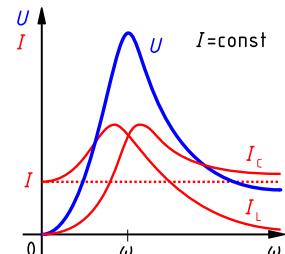
Zeile	Elementarer Reihenschwingkreis	Elementarer Parallelschwingkreis	
1 Ersatzschaltbild			
2 Klemmenverhalten	$\underline{U} = \underline{I}(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})$	$\underline{I} = \underline{U}(G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L})$	
3 Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme			
4 Kenngrößen	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$
5 Ortskurve von Impedanz bzw. Admittanz			
6 Amplitudengänge mit Resonanzminimum			
7 Amplitudengänge mit Resonanzmaxima			

Abbildung 6.3.: Eigenschaften von Schwingkreisen

7. Netzwerkanalyse

Entn. aus [17] [18]

7.1. Systemsimulation

Ebene	Maß	Simulation
Atom	0.1 nm	
Festkörper/Atomverbund	1.0 nm	
Device	0.1 mm	Feld
Transistor/Subkomponenten	1.0 mm	
Gatter/Komponenten	10 mm	Verhaltensmodell

7.2. Makrotheorie

- Mittelwerte charakteristischer Größen des Systems
- Temperatur, Wärmekapazität, Leitfähigkeit etc.
- schwache oder homogene Ortsabhängigkeit
- partielle Differentialgleichungen (PDE's) der Feldtheorie gehen über in gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE's)
- nur noch dt kein dx (nach dem Ort)

7.3. Netzwerksimulation

- Maschenwiderstandsmatrix
- Knotenleitwertmatrix
- mathematisch äquivalente Beschreibungen
- für praktische Berechnungen (Simulation) → Knotenanalyse

7. Netzwerkanalyse

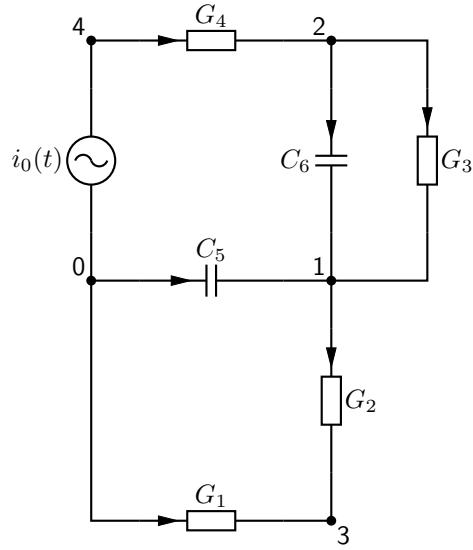


Abbildung 7.1.: Netzwerk für die Knotenspannungsanalyse

7.4. Netzwerk

7.4.1. Transiente Analyse

- Knoten 0:

$$-i_0 - i_1 - i_5 = 0 \quad (7.1)$$

$$-G_1(v_3 - v_0) - C_5 \frac{d}{dt}(v_1 - v_0) = i_0 \quad (7.2)$$

\$\$

- Knoten 1:

$$-i_2 + i_3 + i_5 + i_6 = 0 \quad (7.3)$$

$$-G_2(v_3 - v_1) + G_3(v_1 - v_3) + C_5 \frac{d}{dt}(v_1 - v_0) + C_6 \frac{d}{dt}(v_1 - v_6) = 0 \quad (7.4)$$

- Knoten 2:

$$-i_3 + i_4 - i_6 = 0 \quad (7.5)$$

$$-G_3(v_1 - v_2) + G_4(v_2 - v_4) - C_6 \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = 0 \quad (7.6)$$

7.4.2. Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} G_2 + G_3 & -G_3 & -G_2 & 0 \\ -G_3 & G_3 + G_4 & 0 & -G_4 \\ -G_2 & 0 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & -G_4 & 0 & G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} + \dots \quad (7.7)$$

$$\begin{pmatrix} C_5 + C_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ -C_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i_0 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad (7.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}(t) \quad (7.10)$$

$$= \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (7.11)$$

7.5. Netzwerkanalyse zeitabhängiger Signale

- Matrix \mathbf{B} ist nicht immer invertierbar, ggf. blockweise zerlegen
- Algebro-Differentialgleichungen
- Euler-Verfahren, explizit (vorwärts), implizit (rückwärts)
- Trapez- oder Mittelpunktregel
 - Adams-Bashforth-, Adams-Multon- und Gear-Verfahren
 - Gut für den Rechner → Python, SPICE
 - Wir machen Transformation und dann Gauss'sches-Eliminationsverfahren

7.6. Lösung im Frequenzbereich

	Zeitbereich	Frequenzbereich
Spannung	Urbildbereich $u_n(t)$	Bildbereich $\underline{u}(t) = \hat{U}e^{j\omega t}$
Strom	$i_n(t)$	$\underline{i}(t) = \hat{I}e^{j\omega t}$
Widerstand	$u_R(t) = Ri_R(t)$	$\underline{u}_R(t) = R\underline{i}(t)$
Kondensator	$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$	$\underline{i}_C(t) = j\omega C \underline{u}_C(t)$
Spule	$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ (wenn für $t = 0$ energielos)	$\underline{u}_L(t) = j\omega L \underline{i}_L(t)$

7. Netzwerkanalyse

7.7. Grundaufgabe der Netzwerkanalyse

- Gewinnung des Netzwerkes
- Wahl des Lösungsverfahrens
- Durchführung der Netzwerkanalyse
- Diskussion der Lösung

7.8. Netzwerkgleichungen – Kirchhoff'sche Gesetze

- Knotensatz: $\sum i_n(t) = 0$
- Maschensatz: $\sum u_n(t) = 0$
- Zweigbeziehungen: $u_n = f(i_n)$

7.9. Vollständiges Kirchhoff'sches Gleichungssystem

- $p = k - 1$, unabhängige Knotengleichungen
- $m = z - (k - 1)$, unabhängige Maschengleichungen
- z, u, i -Beziehungen der Zweigelemente

7.10. Netzwerkstruktur

7.10.1. Unabhängige Knoten und Maschen

Die Eigenschaften eines Netzwerkes werden von den Netzwerkelementen und der Netzwerkstruktur oder -topologie bestimmt. Das ist die Art ihrer Zusammenschaltung. Sie wird auch als "Gerüst" bezeichnet und zeichnerisch durch den "Streckenkomplex" (engl. graph) ausgedrückt. Die Beschreibung kann gleichwertig durch eine "topologische Matrix" erfolgen.

7.10.2. Netzwerkgraph

Der Netzwerkgraph beschreibt die Verbindung der Netzwerkelemente durch Abstraktion der Netzwerkgeometrie. Jedem Knoten im Graphen entspricht ein Knoten im Netzwerk und jeder Verbindungsleitung ein Zweig zwischen zwei Knoten. Er ist Grundlage der Zahl unabhängiger Knoten- und Maschengleichungen und kann durch "topologische Matrizen" (sog. "Inzidenzmatrizen") mathematisch beschrieben werden.

7.11. Vollständiger Baum

Ein vollständiger Baum (engl. tree) ist ein Teilgraph, der keine Umläufe besitzt und alle Knoten des Ausgangsgraphen miteinander verbindet. In einem Netzwerk mit k Knoten hat der vollständige Baum insgesamt $k - 1$ Zweige.

7.11.1. Merkmale

- alle Knoten sind direkt oder indirekt miteinander verbunden,
- wird ein weiterer Zweig entfernt, so geht Merkmal 1. verloren,
- es treten keine Umläufe auf.

7.12. Baumkomplement

Das Baumkomplement bildet als Gesamtheit aller Verbindungszweige das “System unabhängiger Zweige”. Jeder Verbindungszweig gehört genau zu einer Schleife (Masche), die nur aus diesem Verbindungszweig und Zweigen des vollständigen Baumes besteht. Eine solche Schleife heißt “Fundamentalschleife” (“unabhängige Masche”). Davon gibt es $m = z - (k - 1)$.

7.13. Maschenstromverfahren

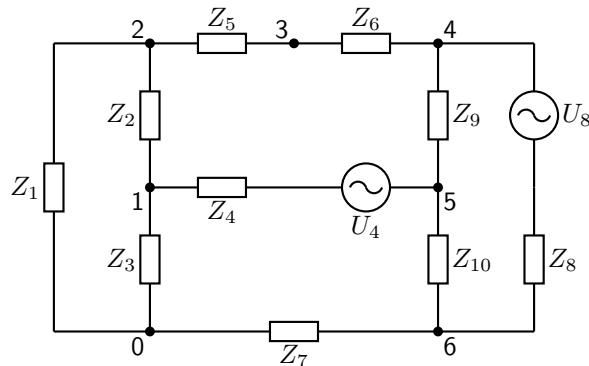


Abbildung 7.2.: Netzwerk für die Maschenstromanalyse

7.14. Wahl der unabhängigen Ströme I_M

$$I_1, I_4, I_7, I_8$$

Abbildung der abhängigen Ströme durch die unabhängigen Ströme:

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_9 \\ I_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

7.15. 4 Maschengleichungen

$$I_1 Z_1 - I_2 Z_2 - I_3 Z_3 = 0 \quad (7.13)$$

$$U_4 + I_4 Z_4 + I_9 + Z_9 - I_6 Z_6 - I_5 Z_5 - I_2 Z_2 = 0 \quad (7.14)$$

$$I_7 Z_7 + I_{10} Z_{10} + I_9 Z_9 - I_6 Z_6 - I_5 Z_5 - I_2 Z_2 - I_3 Z_3 = 0 \quad (7.15)$$

$$U_8 + I_8 Z_8 - I_9 Z_9 - I_{10} Z_{10} = 0 \quad (7.16)$$

Sortieren und aufstellen des Gleichungssystems:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum Z_{1,3} & Z_2 & \sum Z_{2,3} & 0 \\ Z_2 & \sum Z_{2,4,5,6,9} & \sum Z_{2,5,6,9,10} & -Z_9 \\ \sum Z_{2,3} & \sum Z_{2,5,6,9,10} & \sum Z_{2,3,5,6,7,9,10} & \sum -Z_{9,10} \\ 0 & -Z_9 & \sum -Z_{9,10} & \sum Z_{8,9,10} \end{pmatrix}}_z \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{i}_M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -U_4 \\ 0 \\ -U_8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (7.17)$$

7.16. Knotenspannungsanalyse

Beim Knotenspannungsverfahren, das auf Maxwell (1873) zurückgeht, wird die Hilfsvariable *Knotenspannung* so eingeführt, dass jede *Maschengleichung* automatisch erfüllt ist und daher alle wegfallen.

Das Verfahren umfasst dann:

- die Aufstellung der Knotengleichungen für die Zweigströme,
- ihren Ersatz durch die Zweigbeziehungen $I = f(U)$ der Netzwerkelemente ausgedrückt durch Knotenspannungen

(statt der Zweigspannung) und die Lösung der Gleichungen nach den Knotenspannungen.

7.17. Knotenspannungs- vs Maschenstromanalyse

- Wegfall der Baumsuche, auch spielt die Zahl unabhängiger Maschen $m = z - (k - 1)$ und damit die Anzahl der Zweige keine Rolle,
- weil die Knotenspannungen unabhängige Variablen sind, dürfen Spannungsquellen nicht auftreten, denn eine ideale Spannungsquelle zwischen zwei Knoten macht den Strom durch die Quelle unbestimmt.

8. Spulen und Übertrager

i Hinweis

Die Inhalte sind dem gleichnamigen Kapitel 9 von [5] entnommen worden.

Spulen dienen der Verwirklichung von Induktivitäten. Übertrager und Transformatoren nutzen die induktive Kopplung von i. allg. galvanisch getrennten Spulen zur Spannungstransformation und zum Übertragen von elektrischer Leistung. Spulen und Übertrager werden in der Elektronik hauptsächlich zum Aufbau von Stromversorgungen, galvanischen Trennungen (z.B. Trennverstärker) und bei der Verwirklichung von Übertragern (z.B. Filter) mit definiertem Frequenzgang verwendet.

Im Gegensatz zu Kondensatoren und Widerständen stehen Spulen häufig nicht als fertige Bauelemente zur Verfügung. Der Anwender hat die Auswahl unter einer großen Fülle magnetischer Werkstoffe, Kernformen und Spulenaufbauten. Der Entwurf von Spulen und Übertragern – insbesondere für den Bereich hoher Frequenzen – erfordert deshalb eine Vielzahl von material- und damit herstellerspezifischen Angaben, deren Wiedergabe den Rahmen [...] dieser Veranstaltung sprengen würde.

8.1. Physikalische Grundlagen

Jeder von einem Strom durchflossene Leiter erzeugt ein magnetisches Feld der Feldstärke \mathbf{H} . Die Einheit der magnetischen Feldstärke im SI-System ist A/m. Im Vakuum ist \mathbf{H} mit der magnetischen Flußdichte \mathbf{B} verknüpft über $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ wobei $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Vs/Am = 4π nH/cm die magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante) bezeichnet. Die Einheit der magnetischen Flußdichte ist Tesla (1T = 1Vs/m²). Durch Kernmaterialien mit ferromagnetischen oder ferrimagnetischen Eigenschaften wird in technischen Spulen und Übertragern häufig die magnetischen Flußdichte \mathbf{B} erhöht. Durch die magnetische Polarisation dieser Materialien im Feld \mathbf{H} ist die magnetische Flußdichte im Kern um die Permeabilitätszahl μ_r erhöht $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$. Der Wert von μ_r ist aussteuerungsabhängig; bei geringer Aussteuerung liegt μ_r für typische Spulenkerne im Bereich 10^2 bis 10^4 .

i Magnetisierung

Wird ein Stoff in ein Magnetfeld gebracht, so erfolgt eine Magnetisierung (magnetische Polarisation); diese kann durch die Bildung bzw. Ausrichtung magnetischer Dipole im atomaren Bereich erklärt werden und bewirkt eine Erhöhung der magnetischen Flußdichte

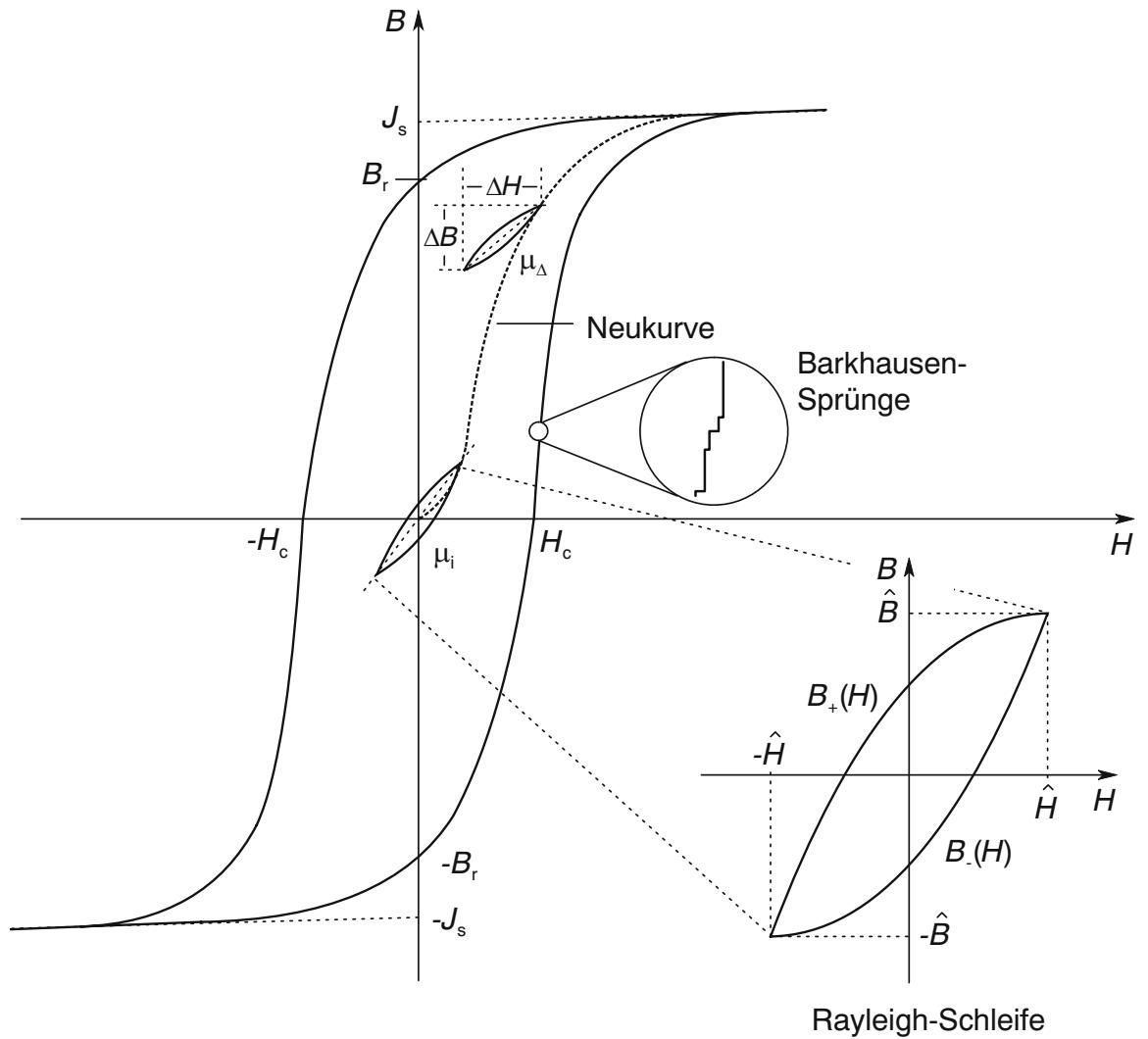


Abbildung 8.1.: $B(H)$ -Hysteresekurve, Rayleigh-Schleife

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{J}.$$

Die Größe **M** wird dabei als *Magnetisierung* und die Größe **J** als *magnetische Polarisation* des Stoffs bezeichnet.

i Permeabilität

Die durch (9.3) definierte relative Permeabilität $\mu_r = B/\mu_0 H$ ferro- oder ferrimagnetischer Materialien ist nichtlinear von der magnetischen Feldstärke abhängig. Bei kleinen Aussteuerungen um den Arbeitspunkt durchläuft B als Funktion von H eine kleine linsenförmige Hystereseschleife. Der Zusammenhang zwischen der Änderung ΔB der magnetischen Induktion und der Änderung ΔH der magnetischen Feldstärke wird durch die *Überlagerungspermeabilität* μ_Δ beschrieben. Diese ist definiert als

$$\mu_\Delta = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

und vom Hub ΔH abhängig. Häufig genügt es, den Grenzfall sehr kleiner Hübe ΔH zu betrachten. In diesem Fall geht μ_Δ über in die *reversible Permeabilität*

$$\mu_{rev} = \frac{1}{\mu_0} \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

i Durchflutungs- und Induktionsgesetz

Durch Integration der magnetischen Flußdichte über eine Fläche A folgt der diese Fläche durchsetzende magnetische Fluß

$$\phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

Der Zusammenhang zwischen Stromfluß und magnetischer Feldstärke wird durch das *Durchflutungsgesetz* (1. Maxwellsche Gleichung) beschrieben. Dieses besagt, daß das Linienintegral über der magnetischen Feldstärke längs einer beliebigen geschlossenen Kurve C gleich dem diese Schleife durchsetzenden Strom i ist,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = i.$$

Ändert sich der eine geschlossene Schleife C durchsetzende magnetische Fluß ϕ , so wird in der Schleife eine Spannung v induziert; induzierte Spannung und Flußänderung sind durch das *Induktionsgesetz* (2. Maxwellsche Gleichung)

$$v = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi}{dt}$$

verknüpft. Der durch die induzierte Spannung hervorgerufene Strom ist nach der *Lenzschen Regel* so gerichtet, daß er seiner Ursache – der Flußänderung – entgegenwirkt. Gleichung (9.12) gilt auch für nichtlineare Induktivitäten, wie Spulen mit Eisenkern, die bis in den Sättigungsbereich hinein ausgesteuert werden. Bei schwacher Aussteuerung kann häufig ein linearer Zusammenhang zwischen Fluß und Strom angenommen

8. Spulen und Übertrager

werden. Sofern nur eine Leiterschleife vorliegt gilt dann $v = Ldi/dt$, wobei L den Induktivitätswert – genauer den *Selbstinduktionskoeffizienten* – des Leiters bezeichnet.

Induktionskoeffizienten ausgewählter Leiterformen

Die Induktionskoeffizienten für nur einen Leiter, bspw. *Zylinderspulen*, *Ringkernspulen*, *Drahtringe* und *gedruckte Spulen* lassen sich aus der Energie des magnetischen Feldes

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d^3x = \frac{1}{2} Li^2$$

berechnen. Mit $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ folgt

$$L = \frac{\mu}{i^2} \int |\mathbf{H}|^2 d^3x.$$

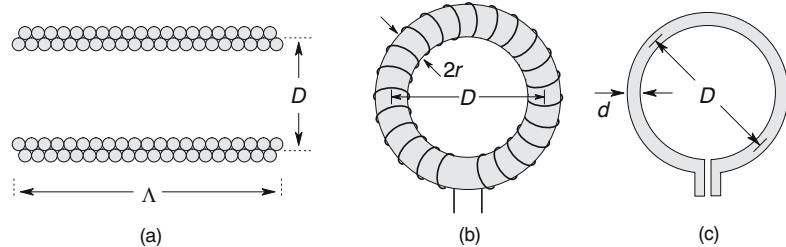


Abbildung 8.2.: (a) Zylinderspule, (b) Ringkernspule und (c) Drahtring

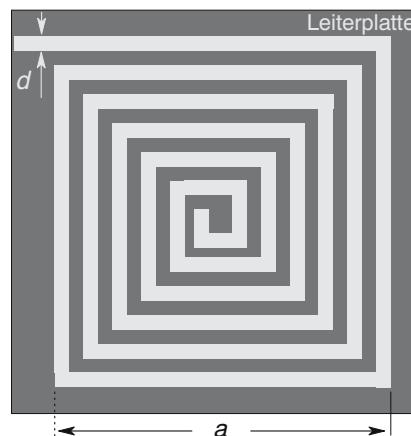


Abbildung 8.3.: Gedruckte Spule (PCB)

8.2. Spulen

Spulen werden gewöhnlich als Drahtwicklung auf einem Spulenkörper aus Isoliermaterial ausgeführt. Häufig dient ein Kern aus einem hochpermeablen Material (Eisen, Ferrit) der

Erhöhung des Induktivitätswerts – Spulen ohne derartigen Kern werden als *Luftspulen* bezeichnet.

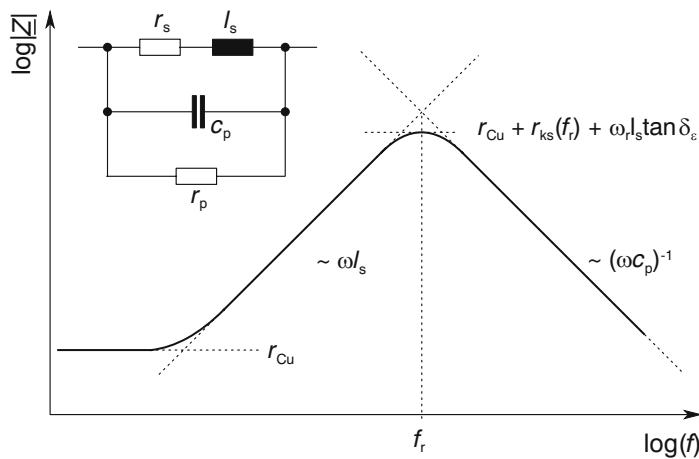


Abbildung 8.4.: Ersatzschaltung einer Spule.

Abbildung Abbildung 8.4 zeigt eine Ersatzschaltung für eine Spule, die bei Kleinsignalsteuerung verwendet werden kann. Da die Netzwerkelemente arbeitspunktabhängig sind, wurden kleine Buchstaben verwendet. Wie in Gl. (9.33) gezeigt wird, lassen sich Ummagnetisierungsverluste einer Spule mit Kern durch den *Kernverlustwiderstand* r_{ks} in Serie zu einer reinen Induktivität l_s erfassen. Zusätzlich zu r_{ks} ist der *Drahtwiderstand* r_{Cu} zu berücksichtigen, so daß

$$r_s = r_{Cu} + r_{ks}.$$

Parallel hierzu liegt die Wicklungskapazität c_p ; dielektrische Verluste in der Isolation werden durch den zusätzlich parallel geschalteten Widerstand r_p beschrieben. Mit dem Verlustfaktor $\tan \delta$ der Isolierschichten gilt demnach $1/r_p \approx \omega c_p \tan \delta$.

i Impedanz, Eigenresonanz

Die Impedanz Z der Spule errechnet sich aus der Ersatzschaltung Abbildung 8.4 zu

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r_p} + j\omega c_p + \frac{1}{j\omega l_s + r_s} \quad (8.1)$$

$$= \frac{-j\omega l_s(1 - c_p r_s^2/l_s - \omega^2 l_s c_p) + r_s + (r_s^2 + \omega^2 l_s^2) \omega c_p \tan \delta}{r_s^2 + \omega^2 l_s^2}. \quad (8.2)$$

Der prinzipielle Verlauf des Scheinwiderstands Z als Funktion der Frequenz ist in Abb. Abbildung 8.4 in doppeltlogarithmischer Auftragung dargestellt. Bei sehr kleinen Frequenzen ist Z durch den ohmschen Widerstand der Wicklung bestimmt. Mit zunehmender Frequenz dominiert dann der induktive Anteil: Z steigt proportional zu f an. Für Frequenzen $f > f_r$ dominiert der kapazitive Parallelleitwert: Hier fällt Z proportional zu $1/f$ ab.

8. Spulen und Übertrager

i Verlustfaktor, Spulengüte

Der Verlustfaktor $\tan \delta_L$ der Spule ist definiert als das Verhältnis von Real- zu Imaginärteil der Impedanz

$$\tan \delta_L = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{\operatorname{Im}(\underline{Z})} = \frac{1}{Q_L};$$

sein Kehrwert Q_L wird als *Spulengüte* bezeichnet.

Mit Luftspulen lassen sich Güten größer als 1000 verwirklichen; bei Spulen mit Kern liegen die Werte niedriger – bei sorgfältiger Dimensionierung sind jedoch Güten von mehr als 500 erreichbar. Trennung von Gl. (9.25) in Real- und Imaginärteil liefert für den Verlustfaktor

$$\tan \delta_L \approx \frac{r_s}{2\pi f l_s} \frac{1}{1 - (f/f_r)^2} + \frac{(f/f_r)}{1 - (f/f_r)^2} \tan \delta_\epsilon,$$

wobei $f_r \approx 1/2\pi l_s c_p$ die (Eigen-)Resonanzfrequenz der Spule bezeichnet und $\omega r_s c_p \tan \delta_\epsilon \ll 1$ sowie $c_p r_s^2 / l_s \ll 1$ angenommen wurde.

8.2.1. Anwendungsbeispiele

Dämpfungsperlen

Dämpfungsperlen sind kleine zylindrische Ferritkörper mit einer Bohrung, durch die ein Draht geführt werden kann. Sie weisen einen Durchmesser von wenigen Millimetern auf und werden gewöhnlich über einen Anschlußdraht eines bedrahteten Bauteils – z.B. Basisanschluß eines Transistors – gesteckt.

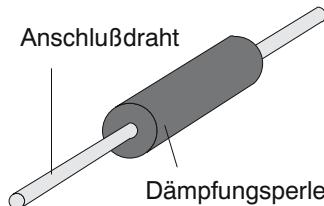


Abbildung 8.5.: Dämpfungsperle

Durch die Dämpfungsperle wird die Impedanz des Anschlußdrahts erhöht. Ist diese ohne Dämpfungsperle durch $R_0 + j\omega L_0$ gegeben, so folgt mit der komplexen Permeabilität $\mu_r = \mu'_s - j\mu''_s$ des Materials überschlagsmäßig für die Impedanz \underline{Z} des Anschlußdrahts bei der Kreisfrequenz ω

$$\underline{Z} \approx R + j\omega L(\mu'_s - j\mu''_s) = R_0 + \omega \mu''_s L_0 + j\omega \mu'_s L_0.$$

Dämpfungsperlen verringern auf kostengünstige Weise hochfrequente Stromanteile ohne störende Serienwiderstände im NF-Bereich zu verursachen. Sie werden zur Unterdrückung

von Überschwingen bei Schaltvorgängen, zur Dämpfung selbsterregter Schwingungen aufgrund parasitärer Rückkopplungen in Verstärkerschaltungen sowie zur Unterdrückung hochfrequenter Rauschanteile eingesetzt. Ihre Wirksamkeit beruht darauf, daß sie im relevanten Frequenzbereich eine nennenswerten Serienimpedanz hervorrufen. [...]

Drosselspulen

Drosselspulen sollen den Gleichanteil I_L des sie durchfließenden Stroms möglichst wenig, den Wechselanteil möglichst stark dämpfen (drosseln). Der Kern einer Drosselspule ist deshalb in der Regel mit einem starken Gleichfeld belastet, dem ein schwaches Wechselfeld überlagert ist. Die Verluste in der Drosselspule sind somit vorwiegend Kupferverluste, da der dominierende Gleichanteil keine Kernverluste verursacht; vgl. auch {cite}schlienz2020 Kap. 2 - Abwärtswandler.

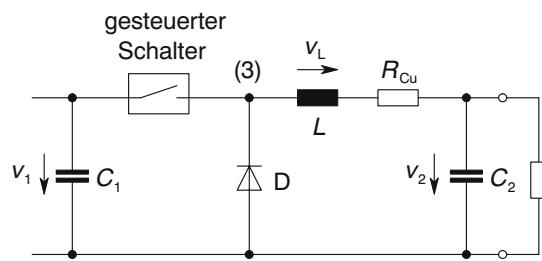


Abbildung 8.6.: Schaltnetzteil mit Drossel-Abwärtswandler

Power Management Integrated Circuits (PMICs)

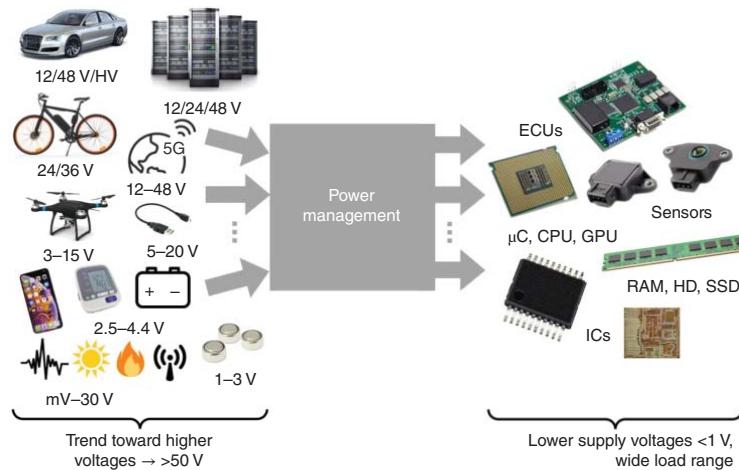


Abbildung 8.7.: PMICs

"Power management integrated circuits (PMICs) are essential in today's electronic devices. They manage power delivery and consumption, provide efficient power supplies, and drive

8. Spulen und Übertrager

power switches that control actuators and motors, as illustrated in Abbildung 8.7 PMICs can be integrated into complex integrated circuits (ICs) or implemented as dedicated ICs. In this book, the term PMIC will refer to any type of power integrated circuit.

The importance of PMICs has grown significantly in recent years, driving innovation and progress in various industries, from consumer electronics to automotive and industrial applications. With the progress of machine learning and artificial intelligence (AI), intelligent power management is critical to supplying complex processors and sensors.

PMICs have enabled the development of smaller, more energy-efficient, and reliable electronic solutions. They also play an essential role in environmental aspects and sustainability. By regulating the power supply of electronic devices, PMICs can reduce energy consumption and carbon emissions. Moreover, PMICs are crucial for the development of renewable energies, such as solar and wind power, by enabling efficient power conversion and management.” [19]

- IoT Nodes and Energy Harvesting
- Portable Devices, Smartphones, and Wearables
- Universal Serial Bus (USB)
- Drones
- Telecommunication Infrastructures
- E-Bikes
- Automotive
- Data-Centers

8.3. Transformatoren und Übertrager

Durch magnetische Verkopplung zweier galvanisch getrennter Stromkreise kann zwischen diesen Leistung übertragen werden. Dies wird angewendet in *Transformatoren* (Trafos), die der Umsetzung von Spannungs- bzw. Stromwerten dienen sowie in *Übertragern* und *Trenntrafos* zur galvanischen Trennung von Wechselstromkreisen, Impedanzanpassung, Unterdrückung von Gleichanteilen und zum Unterbrechen von Erdschleifen. Die Verkopplung der Induktivitäten wird gewöhnlich durch einen gemeinsamen Kern erhöht, der – zur Verbesserung der Linearität – meist einen Luftspalt enthält.

Abbildung Abbildung 8.8 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Transformators bzw. Übertragers mit einer primärseitigen Wicklung der Windungszahl n_1 und einer sekundärseitigen Wicklung der Windungszahl n_2 . Wird die primärseitige Spule von einem Strom i_1 durchflossen, so setzt sich der erzeugte Fluß

$$\phi_{11} = \phi_{1\sigma} + \phi_{12}$$

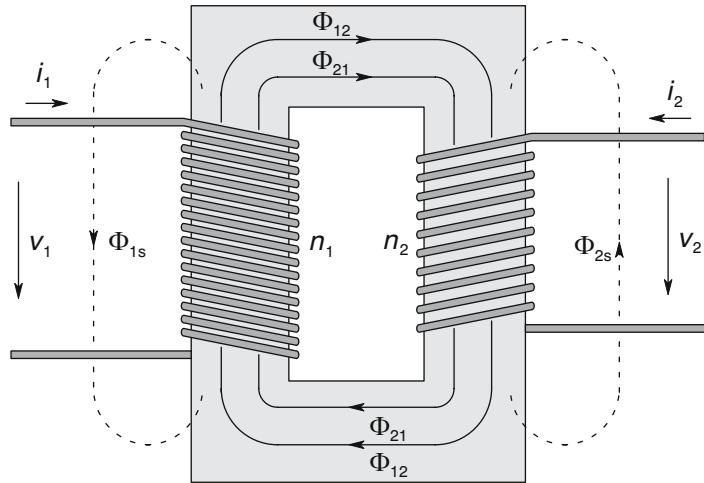


Abbildung 8.8.: Haupt- und Streuflüsse im Transformator

aus dem primären Streufluß $\phi_{1\sigma}$ und dem die Sekundärwicklung durchsetzenden Fluß ϕ_{12} zusammen. Entsprechend lässt sich der von der Sekundärwicklung erzeugte Fluß ϕ_{22} in den sekundären Streufluß $\phi_{2\sigma}$ und den die Primärwicklung durchsetzenden Fluß ϕ_{21} zerlegen

$$\phi_{22} = \phi_{2\sigma} + \phi_{21}.$$

Der die Primärwicklung durchsetzende Fluß ϕ_1 und der die Sekundärwicklung durchsetzende Fluß ϕ_2 sind damit

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21} \quad \text{und} \quad \phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12}.$$

Unter Berücksichtigung der Spannungsabfälle an den Wicklungen folgt aus dem Induktionsgesetz für die Spannungsabfälle in Primär- und Sekundärkreis

$$v_1 = R_{Cu1} i_1 + n_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (8.3)$$

$$v_2 = R_{Cu2} i_2 + n_2 \frac{d\phi_2}{dt}. \quad (8.4)$$

Die Beziehungen (45) gelten allgemein und sind auch bei Aussteuerung des Kernmaterials in den Sättigungsbereich anwendbar. Bei Aussteuerung mit geringer Amplitude besteht annähernd ein linearer Zusammenhang zwischen den Flüssen und den Spulenströmen

$$\phi_{11} = L_1 i_1, \quad \phi_{12} = M i_1, \quad \phi_{21} = M i_2 \quad \text{und} \quad \phi_{22} = L_2 i_2.$$

Dabei bezeichnet $L_1 = L_{11}$ den (Selbst-)Induktionskoeffizienten der Primärwicklung, $M = L_{12}$ den Gegeninduktionskoeffizienten von Primär- und Sekundärwicklung und $L_2 = L_{22}$

8. Spulen und Übertrager

den (Selbst-)Induktionskoeffizienten der Sekundärwicklung. Durch Einsetzen in die Gln. (9.68) und (9.69) ergeben sich die sog.

i Transformatorgleichungen

$$\underline{v}_1 = R_{Cu1}i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (8.5)$$

$$\underline{v}_2 = R_{Cu2}i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (8.6)$$

Diese Beziehungen gelten nur bei Kleinsignalaussteuerung ohne Vormagnetisierung im Bereich niederer Frequenzen. Bei höheren Frequenzen tritt eine Phasenverschiebung zwischen magnetischem Feld (bzw. Spulenstrom) und magnetischer Polarisation auf.

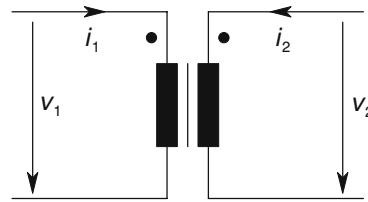


Abbildung 8.9.: Schaltsymbol zweier gekoppelter Induktivitäten

8.3.1. Der verlustlose Übertrager

Bei sinusförmiger Erregung folgt unter Vernachlässigung der Drahtwiderstände ($R_{Cu1} = R_{Cu2} = 0$) aus den *Transformatorgleichungen* für die komplexen Zeiger der Wechselspannungsanteile an Primär- und Sekundärwicklung (Abb. Abbildung 8.9)

$$\underline{v}_1 = j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 \quad (8.7)$$

$$\underline{v}_2 = j\omega M i_1 + j\omega L_2 i_2 \quad (8.8)$$

Mit dem *Kopplungsfaktor* $k = M/L_1L_2$ lässt sich dies umformen zu

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \underline{v}_2 - j\omega \frac{1-k^2}{k} \sqrt{L_1 L_2} \cdot i_2 \quad (8.9)$$

$$i_1 = \frac{1}{j\omega k \sqrt{L_1 L_2}} \cdot \underline{v}_2 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot i_2 \quad (8.10)$$

Bei belastetem Ausgang gilt $i_2 = -\underline{v}_2/Z_L$; für den *Spannungsübertragungsfaktor* folgt damit aus Gl. (48)

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} + j\omega \frac{1-k^2}{k} \sqrt{L_1 L_2} \frac{1}{Z_L}.$$

i Vollständige Kopplung

Im Fall idealer Kopplung ($|k| = 1$) verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (49); das Spannungsverhältnis ist dann

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{L_2} = .$$

Die Größe \dot{u} wird dabei als *Übertragungsverhältnis* bezeichnet. Zwischen den Zeigern der Ströme besteht nach Gl. (9.75) der Zusammenhang

$$i_1 = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot i_2 + \frac{1}{j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \cdot v_2$$

Im Grenzfall des *idealen Übertragers* mit $L_1 = 2L_2 \rightarrow \infty$ führt dies auf

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{-1}{.}$$

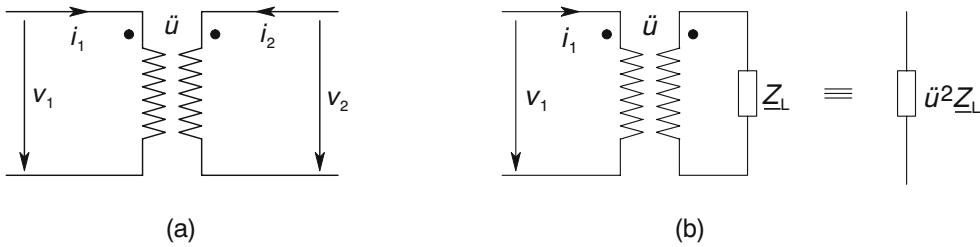


Abbildung 8.10.: Idealer Übertrager. (a) Schaltsymbol und (b) Impedanztransformation mit idealem Übertrager

Abbildung Abbildung 8.10 (a) zeigt des Netzwerksymbol eines idealen Übertragers. Für diesen gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Zeigern von Strom und Spannung an Ein- und Ausgang

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Besitzen die beiden Wicklungen des Übertragers denselben A_L -Wert, so ist $L_1 = A_L n_1^2$ und $L_2 = A_L n_2^2$, wobei n_1 und n_2 die Windungszahlen der jeweiligen Wicklung bezeichnen. In Gl. (9.76) des Spannungsübertragungsfaktors eingesetzt folgt

$$= n_1 / n_2,$$

8. Spulen und Übertrager

d.h. im idealen Übertrager ist das Übertragungsverhältnis $\underline{\underline{u}}$ gleich dem Verhältnis der jeweiligen Windungszahlen.

i Impedanztransformation

Wird der Ausgang eines idealen Übertragers mit der Impedanz $\underline{\underline{Z}}_L$ beschaltet (Abb. Abbildung 8.10 (b)), so gilt $\underline{v}_2 / i_2 = -\underline{\underline{Z}}_L$. Für die Eingangsimpedanz $\underline{\underline{Z}}_i$ des Übertragers folgt damit

$$\underline{\underline{Z}}_i = \frac{\underline{v}_1}{i_1} = \frac{\underline{v}_1}{\underline{v}_2} \cdot \frac{\underline{v}_2}{i_2} \cdot \frac{i_2}{i_1} = {}^2\underline{\underline{Z}}_L,$$

d.h. der ideale Übertrager mit vollständiger Kopplung "transformiert" Impedanzen im Verhältnis $\underline{\underline{u}}^2$ von der Sekundärseite auf die Primärseite.

8.3.2. Realer (verlustbehafteter) Übertrager

In realen Übertragern ist der Kopplungsfaktor von eins verschieden, da aufgrund von Streufeldern der die eine Spule durchsetzende Fluß die andere nicht vollständig durchsetzt.

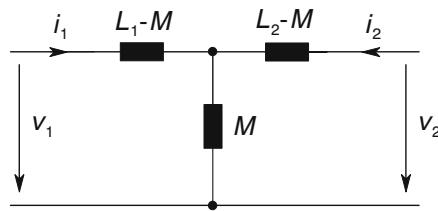


Abbildung 8.11.: T-Ersatzschaltung

Die Transformatorgleichungen lassen sich in die in Abb. Abbildung 8.11 dargestellte T-Ersatzschaltung überführen. Durch Anwenden des Maschensatzes folgt sofort

$$\underline{v}_1 = j\omega(L_1 - M)i_1 + j\omega M(i_1 + i_2) = j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 \quad (8.11)$$

$$\underline{v}_2 = j\omega(L_2 - M)i_2 + j\omega M(i_1 + i_2) = j\omega L_2 i_2 + j\omega M i_1 \quad (8.12)$$

Das Verhalten des Übertragers kann demnach durch drei verschaltete Induktivitäten, die beiden Längsinduktivitäten $L_1 - M$ und $L_2 - M$ sowie die Gegeninduktivität M beschrieben werden. Für Kopplungsfaktoren von annähernd eins gilt $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$; d.h. zumindest eine der Längsinduktivitäten ist negativ. Die T-Ersatzschaltung ist aus diesem Grund als rein formales Netzwerk anzusehen, das die Transformatorgleichungen korrekt erfaßt – eine physikalisch anschauliche Interpretation der Netzwerkelemente besteht jedoch nicht.

Abbildung Abbildung 8.12 zeigt die Ersatzschaltung eines unvollständig gekoppelten ($k < 1$), ansonsten verlustfreien Übertragers. Dabei wird von der Induktivität L_1 ein Streuanteil σL_1 abgespalten; der

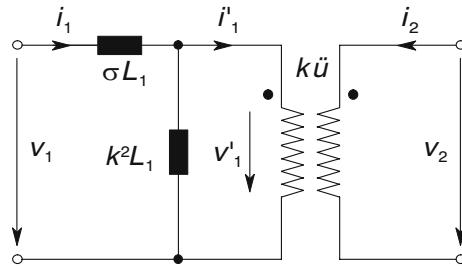


Abbildung 8.12.: Ersatzschaltung eines unvollständig gekoppelten Übertragers

i Streugrad σ

des Übertragers ist definiert als

$$\sigma = 1 - k^2.$$

Lediglich der an $k^2 L_1$ auftretende Spannungsabfall wirkt als Eingangsspannung des idealen Übertragers mit Übertragungsverhältnis $k \bar{U}$. Die Netzwerkgleichungen für diese Ersatzschaltung lauten

$$v'_1 = v_1 - j\omega \sigma L_1 i_1 = k v_2, \quad i_1 = v_1 + i_1 j \omega k^2 L_1$$

und $i_1 = -i_2/k$. Durch Eliminieren von v_1 und i_1 lassen sich diese in die Gln. (48) überführen, wobei die Details der Rechnung dem Leser als Übungsaufgabe überlassen werden.

8.3.3. Übertragungsfaktor

Übertrager sollen eine formtreue Signalübertragung aufweisen, was erhöhte Anforderungen an die Linearität bedingt und eine hohe Bandbreite voraussetzt. Für eine Untersuchung des Frequenzgangs von Übertragern wird die in Abb. Abbildung 8.14 gezeigte Ersatzschaltung herangezogen, wobei die durch C_3 und C_4 beschriebene kapazitive Kopplung zwischen Primär- und Sekundärwicklung (vgl. Abb. Abbildung 8.13 (a)) vernachlässigt wird.

Der Ausgang des idealen Übertragers in der Ersatzschaltung Abb. Abbildung 8.14 ist mit der Impedanz

$$Z_x = r_{Cu2} + \frac{Z_L}{1 + j\omega C_2 Z_L}$$

beschaltet, die eingangseitig wie eine Impedanz $k^2 Z_x$ wirkt. Zur Berechnung der Amplitude von v'_1 kann demnach die in Abb. Abbildung 8.15 dargestellte Ersatzschaltung herangezogen werden.

Nach der Spannungsteilerregel folgt sofort

8. Spulen und Übertrager

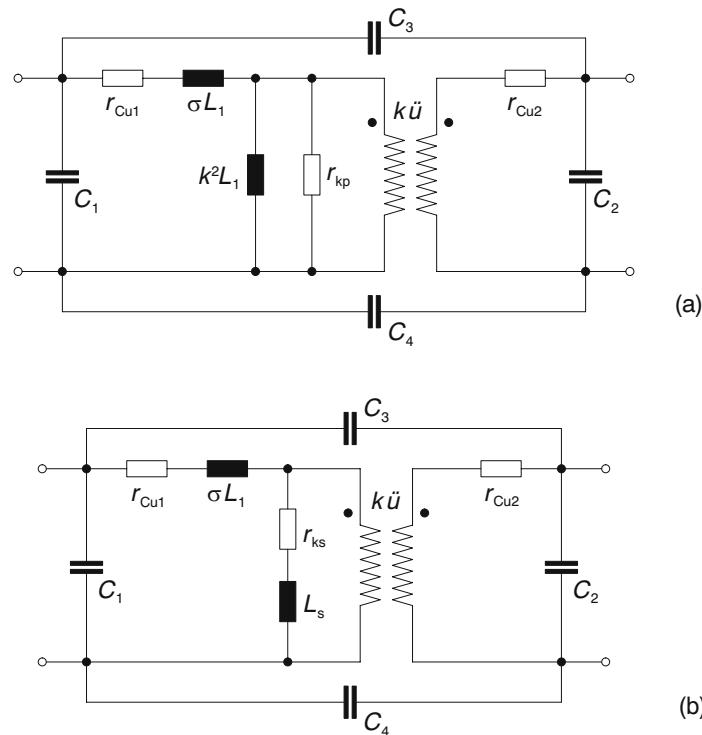


Abbildung 8.13.: (a) Parallel- und (b) Serienersatzschaltung eines verlustbehafteten Übertragers

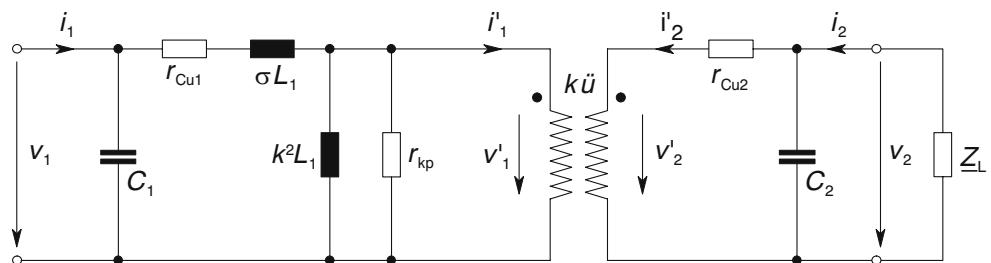


Abbildung 8.14.: Parallelersatzschaltung eines verlustbehafteten Übertragers mit beschaltetem Ausgang

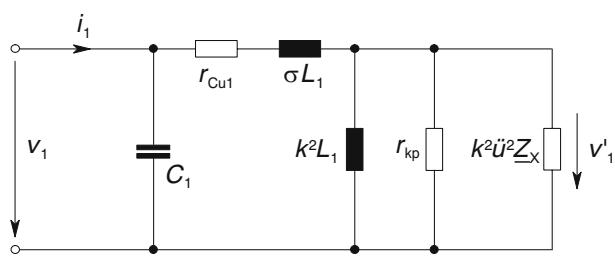


Abbildung 8.15.: Zusammenfassung und Transformation der Sekundärseite

$$\frac{\underline{v}'_1}{\underline{v}_1} = \frac{j\omega k^2 L_1 \| r_{kp} \| k^{22} \underline{Z}_x}{r_{Cu1} + j\omega \sigma L_1 + j\omega k^2 L_1 \| r_{kp} \| k^{22} \underline{Z}_x} \quad (8.13)$$

$$= \frac{1}{1 + (r_{Cu1} + j\omega \sigma L_1) \left(\frac{1}{j\omega k^2 L_1} + \frac{1}{r_{kp}} + \frac{1}{k^{22} \underline{Z}_L} \right)} \quad (8.14)$$

Ebenfalls durch Anwenden der Spannungsteilerregel erhält man

$$\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}'_2} = \frac{\underline{Z}_L \| (j\omega C_2)^{-1}}{\underline{Z}_x} \quad (8.15)$$

$$= \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + r_{Cu2}(1 + j\omega C_2 \underline{Z}_L)}. \quad (8.16)$$

Mit dem Übertragungsverhältnis k des idealen Übertragers folgt für den Spannungsübertragungsfaktor

$$H_v = \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}'_1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}'_2} \cdot \frac{\underline{v}'_1}{\underline{v}_1}$$

Im Folgenden wird der Fall einer rein ohmschen Last $\underline{Z}_L = R_L$ betrachtet; unter diesen Umständen gilt

$$\underline{Z}_x = r_{Cu2} + \frac{R_L}{1 + j\omega C_2 R_L} \quad \text{und} \quad \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}'_2} = \frac{R_L}{R_L + r_{Cu2}(1 + j\omega C_2 R_L)}.$$

Der Spannungsübertragungsfaktor ergibt sich hiermit und durch Ausmultiplizieren in der Form

$$H_v = \frac{A_{v0}}{1 - jf_u/f + jf/f_o - f^2/f_r^2}$$

was ein Bandpaßverhalten beschreibt.

8.3.4. Leistungsübertrager, Transformatoren

Beim Transformator steht die maximal übertragbare Leistung im Vordergrund – Signalverformungen sind zulässig. Aufgrund der Proportionalität der in die Sekundärwicklung induzierten Spannung zur Frequenz f (bei konstantem Induktionshub ΔB) steigt die in einem Transformator von der Primärseite auf die Sekundärseite übertragbare Leistung annähernd proportional zu f an. Unter Vernachlässigung der Spannungsabfälle an den Wicklungswiderständen, Streuinduktivitäten und der Vormagnetisierung gilt die folgende Näherung für die übertragene Leistung

8. Spulen und Übertrager

$$P = C \cdot \Delta B \cdot J \cdot A_W A_e \cdot F_{Cu} \cdot f.$$

Dabei bezeichnet C einen von der Betriebsart abhängigen Faktor, der typischerweise im Bereich $0.6 < C < 1$ liegt und J die Stromdichte in der Wicklung. Der Induktionshub ΔB ist bei niedrigen Frequenzen durch Sättigungseffekte und bei hohen Frequenzen durch die Erwärmung des Kerns aufgrund von Kernverlusten beschränkt. Die Stromdichte J wird durch die Erwärmung der Wicklung aufgrund von Kupferverlusten begrenzt.

Der wirksame Kernquerschnitt sollte im Sinne geringer Kosten und geringen Gewichts möglichst klein sein. Eine Steigerung der übertragbaren Leistung ist demnach nur durch eine Anhebung der Frequenz möglich. Mit zunehmender Schaltfrequenz kann das Gewicht – und damit auch der Preis – von Stromversorgungen und DC-DC-Wandlern gesenkt werden.

Ein 100 W-Netzteil, realisiert mit einem bei Netzfrequenz (50 Hz) arbeitenden Transistor, hat eine Masse in der Größenordnung von 10 kg; durch Erhöhen der Schaltfrequenz auf 50 kHz kann diese auf unter 1 kg gesenkt werden, bei 500 kHz sind weniger als 400 g erreichbar. Wesentlich für diese Anhebung der Schaltfrequenz war die Entwicklung spezieller, verlustarmer Ferritwerkstoffe; vgl. mit [20], Kap. 15.

Teil II.

Hörsaalübungen

9. Periodische Signale

9.1. Darstellung von Signalen

Stellen Sie die Signale des angegebenen Netzwerks mit Python (und/oder von Ihnen gewählten alternativen Softwarepaketen des wissenschaftlichen Rechnens, z.B. Matlab oder Gnu Octave) dar.

Die Komponenten Werte sind: $\omega = 2\pi \text{ 1 kHz}$, $\hat{U}_0 = 10 \text{ V}$, $R = 30 \Omega$, $L = 3 \text{ mH}$, $\hat{I}_0 = 0.282 \text{ A}$, $\varphi_I = -32.1 \text{ Grad}$.

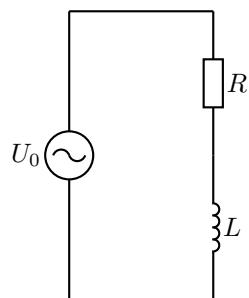


Abbildung 9.1.: Wechselstromschaltung

 Lösung

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f = 10**3 # Grundfrequenz 1 kHz wird auch als 10e3 geschrieben
w = 2 * np.pi * f # Kreisfrequenz

U0p = 10 # Spannung in Volt
R = 30 # Widerstand in Ohm
L = 3e-3 # Induktivität in Henry
I0p = 0.282 # Strom in Ampere
phiI = -32.1 * np.pi / 180 # Winkel in rad

t = np.linspace(0, 5e-3, 1000) # Zeitachse anlegen
u0 = U0p * np.sin(w * t)
i0 = I0p * np.sin(w * t + phiI)
uL = w * L * I0p * np.sin(w * t + phiI + np.pi / 2) # Spannung über Induktivität
uR = R * i0 # Spannung über Widerstand

plt.plot(w * t, u0, label=r'$u_0$')
plt.plot(w * t, uR, label=r'$u_R$')
plt.plot(w * t, uL, label=r'$u_L$')
plt.plot(w * t, i0, label=r'$i_0$')
plt.xlabel(r'$\omega t$')
plt.ylabel(r'$u(t)$')
plt.grid()
plt.legend()

plt.show()

```

9.2. Überlagerung von sinusförmigen Spannungen mit verschiedenen Frequenzen

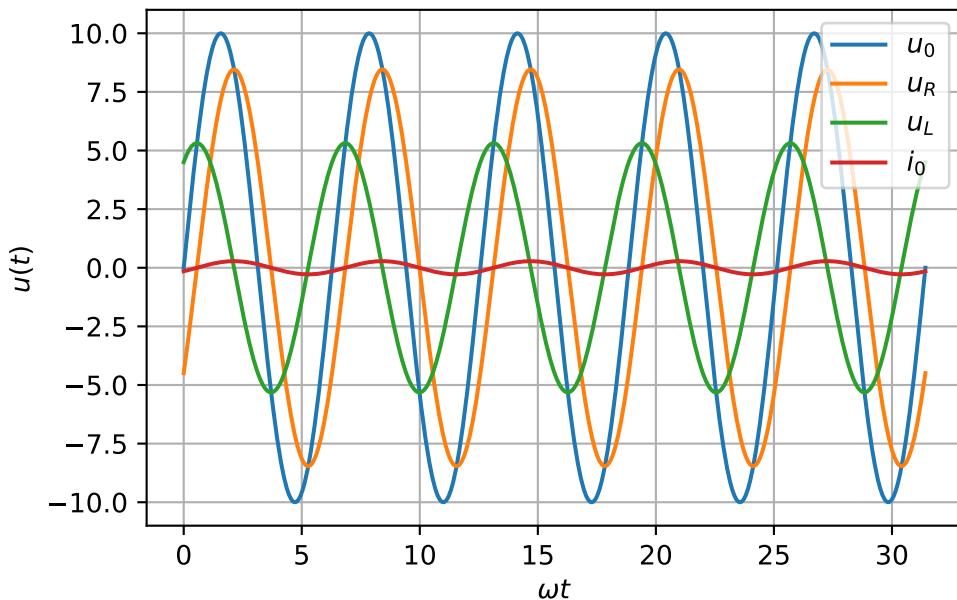


Abbildung 9.2.: Strom- und Spannungssignale

9.2. Überlagerung von sinusförmigen Spannungen mit verschiedenen Frequenzen

Der zeitliche Verlauf einer Spannung mit $\omega_2 = 3\omega_1$ sei gegeben durch

$$u(t) = U_0 + \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{U}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi).$$

9.2.1. Periodendauer

Wie groß ist die Periodendauer T ?

Lösung

Die Periodendauer T ist der kleinste Zeitabschnitt mit $u(t+T) = u(t)$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

9.2.2. Mittelwert

Berechnen Sie den Mittelwert der Spannung $u(t)$!

9. Periodische Signale

Lösung

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = U_0$$

9.2.3. Effektivwert

Berechnen Sie den Effektivwert U_{eff} der Spannung $u(t)$! Wie lässt sich U_{eff} aus den Effektivwerten der drei Einzelspannungen berechnen?

Tipp

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2}$$

Lösung

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u^2(t)} dt \quad (9.1)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{U}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi))^2 dt \quad (9.2)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (U_0^2 + 2U_0 \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t) + 2U_0 \hat{U}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) + \hat{U}_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2\hat{U}_1 \hat{U}_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) + \hat{U}_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi)) dt \quad (9.3)$$

$$+ \hat{U}_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2\hat{U}_1 \hat{U}_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \quad (9.4)$$

$$+ \hat{U}_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi)) \quad (9.5)$$

$$= U_0^2 + \frac{1}{2} \hat{U}_1^2 + \frac{1}{2} \hat{U}_2^2 \quad (9.6)$$

$$= U_0^2 + U_{1,eff}^2 + U_{2,eff}^2 \quad (9.7)$$

9.2.4. Scheitelfaktor

Wie groß ist der Scheitelfaktor U_{max}/U_{eff} , wenn $U_0 = 1 \text{ V}$, $\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = 100 \text{ mV}$ und $\varphi = 60 \text{ Grad}$?

```
import numpy as np
import scipy.integrate as si
import scipy.optimize as so
import matplotlib.pyplot as plt

U0 = 1
U1p = 100e-3
U2p = 100e-3
phi = 60 * np.pi / 180
```

9.2. Überlagerung von sinusförmigen Spannungen mit verschiedenen Frequenzen

```

f1 = 1e3
T = 1 / f1
w1 = 2 * np.pi * f1
w2 = 3 * w1

# Definition der Spannungen als Funktion
def u(t):
    return U0 + U1p * np.cos(w1 * t) + U2p * np.cos(w2 * t + phi)

def u2(t):
    return (U0 + U1p * np.cos(w1 * t) + U2p * np.cos(w2 * t + phi))**2

# Zeit als Vektor
t = np.linspace(0, 5e-3, 3000)

# Darstellung der Funktion
fig1 = plt.figure(1)
plt.plot(t, u(t))
plt.xlabel('Zeit t/s')
plt.ylabel('Spannung u(t)/V')
plt.grid('on')
plt.show()

# Mittelwert der Spannung u(t)
y, err = si.quad(u, 0, T)
u_bar = 1 / T * y
print('Der Mittelwert:', u_bar)

# Effektivwert der Spannung u(t)
y2, err2 = si.quad(u2, 0, T)
U_eff = np.sqrt(1 / T * y2)
print('Der Effektivwert:', U_eff)

# Berechnung des Scheitelfaktors, Fixpunkt-Iteration
def func(x, c1, c2, c3):
    return 1.0 / 3.0 * (np.arcsin(-c1 / (3 * c2) * np.sin(x)) - c3)

SF = so.fixed_point(func, 1, args=(U1p, U2p, phi), xtol=1e-6)
print('Der Scheitelfaktor:', SF)

```

9. Periodische Signale

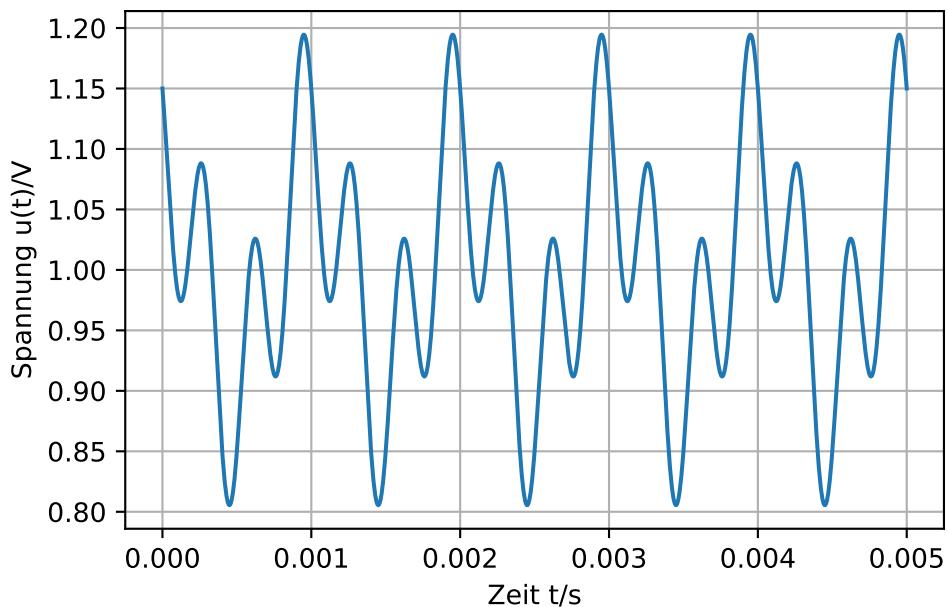


Abbildung 9.3.: Darstellung der Mittelwerte

Der Mittelwert: 1.0

Der Effektivwert: 1.004987562112089

Der Scheitelfaktor: -0.31462061084367027

Lösung

$$U_{max} = u(t_{max}); \quad \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=t_{max}} = 0 \quad (9.8)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = -\hat{U}_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) - \hat{U}_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi) \quad (9.9)$$

$$\sin(3\omega_1 t_{max} + \varphi) = -\frac{\hat{U}_1}{2\hat{U}_2} \sin(\omega_1 t_{max}) \quad (9.10)$$

$$\omega_1 t_{max} = \frac{1}{3} \left(\arcsin \left(-\frac{\hat{U}_1}{3\hat{U}_2} \sin(\omega_1 t_{max} + \varphi) \right) \right) \quad (9.11)$$

Die letzte Gleichung ist eine sog. *Fixpunktiteration*, deren numerische Lösung im Programmcode formuliert ist. Nach ein paar Iterationschritten erhält man $\omega_1 t_{max} = -0.315$. Daraus ergeben sich $U_{max} = 1.195$ V und $U_{eff} = 1.005$ V.
Der gesuchte *Formfaktor* berechnet sich zu:

$$\frac{U_{max}}{U_{eff}} = 1.189$$

9.3. Schaltungsberechnung in reeller Schreibweise

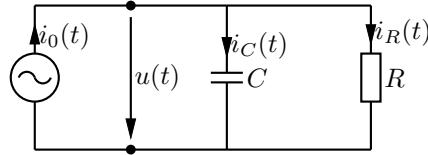


Abbildung 9.4.: Netzwerk zur Schaltungsanalyse

Gegeben sei die in Abbildung 9.4 skizzierte Schaltung mit einer Wechselstromquelle $i_0(t) = \hat{I}_0 \sin(\omega t)$.

9.3.1. Amplitude und Phase

Berechnen Sie Amplitude und Phasenwinkel jeweils von $u(t)$, $i_C(t)$ und $i_R(t)$!

Lösung

Sei $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$, dann ergeben sich die Ströme zu:

$$i_C(t) = \omega C \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = -\omega C \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (9.12)$$

$$i_R(t) = \frac{\hat{U}}{R} \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (9.13)$$

Knotengleichung: $i_0(t) = i_C(t) + i_R(t)$

$$\hat{I}_0 \sin(\omega t) = -\omega C \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) + \frac{\hat{U}}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (9.14)$$

$$\hat{I}_0 \sin(m - \varphi_u) = -\omega C \hat{U} \cos(m) + \frac{\hat{U}}{R} \sin(m), \quad m = \omega t + \varphi_u \quad (9.15)$$

$$\hat{I}_0 (\sin(m) \cos(\varphi_u) - \cos(m) \sin(\varphi_u)) = -\omega C \hat{U} \cos(m) + \frac{\hat{U}}{R} \sin(m) \quad (9.16)$$

$$(9.17)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\hat{I}_0 \cos(\varphi_u) = \frac{\hat{U}}{R} \quad (9.18)$$

$$\hat{I}_0 \sin(\varphi_u) = -\omega C \hat{U} \quad (9.19)$$

$$\tan \varphi_u = \frac{\sin(\varphi_u)}{\cos(\varphi_u)} = \frac{-\omega C \hat{U}}{\frac{\hat{U}}{R}} = -\omega RC \quad (9.20)$$

$$\varphi_u = \arctan(-\omega RC) \quad (9.21)$$

$$\hat{I}_0 \cos(\varphi_u) = \frac{\hat{U}}{R} \quad (9.22)$$

$$\hat{U} = R\hat{I} \cos \varphi_u = R\hat{I} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}} \quad (9.23)$$

$$= \frac{R\hat{I}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (9.24)$$

$$\hat{I}_C = \omega C \hat{U} \quad (9.25)$$

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}}{R} \quad (9.26)$$

9.3.2. Spannungsverläufe

Skizzieren Sie mithilfe von Python $i_0(t), u(t), i_C(t)$ und $i_R(t)$ für $\hat{I}_0 = 14.1 \text{ mA}$, $f = 3.183 \text{ kHz}$, $R = 50 \Omega$ und $C = 1 \mu \text{ F}$!

```
from numpy import pi, sin, linspace
import matplotlib.pyplot as plt

f = 3.183e3 # Frequenz kHz
w = 2 * pi * f # Kreisfrequenz
R = 50 # Widerstand in Ohm
C = 1e-6 # Kapazität in Farad
I0 = 14.1e-3 # Strom
t = linspace(0, 1e-3, 1000) # Länge der x-Achse und

# Strom- und Spannungsfunktionen
i_0 = I0 * sin(w * t) # Stromquelle
u = 5e-3 * sin(w * t - pi / 4) # Spannung
i_C = 10e-3 * sin(w * t + pi / 4) # Strom am Kondensator
i_R = 10e-3 * sin(w * t - pi / 4) # Strom am Widerstand

# Plot der Signale
plt.figure()
plt.plot(t, i_0, label='$i_0$')
plt.plot(t, u, label='$u$')
plt.plot(t, i_C, label='$i_C$')
plt.plot(t, i_R, label='$i_R$')
plt.xlabel('Zeit t in s')
plt.ylabel('Strom in i(t) mA und Spannung u(t) in 100 mV')
plt.legend(loc='upper right')
plt.grid()
plt.show()
```

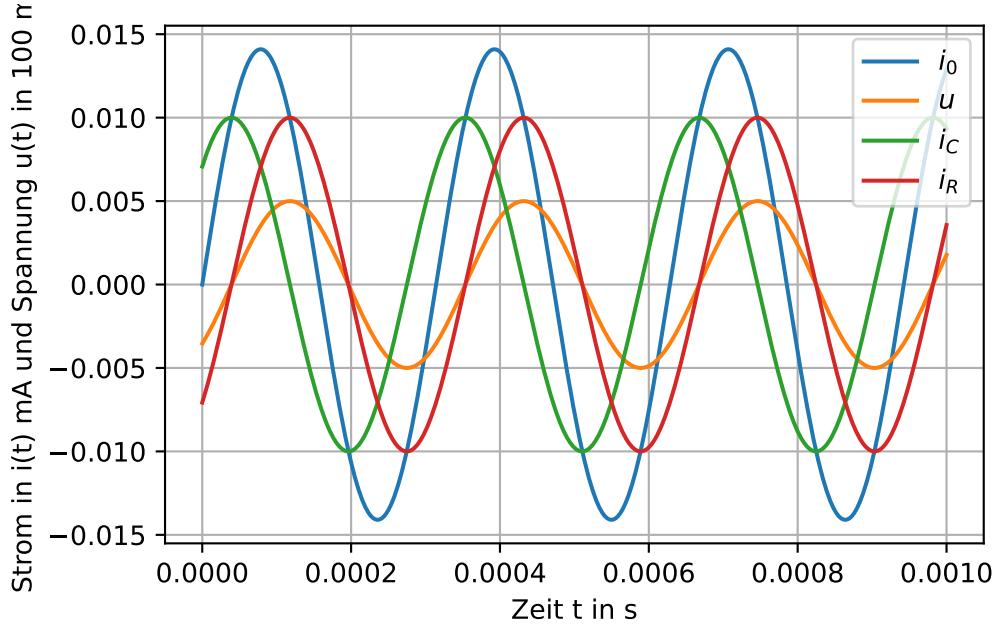


Abbildung 9.5.: Strom- und Spannungsverläufe

Lösung

Mit den Werten ergeben sich folgende Spannungs- und Stromverläufe:

- $i_0(t) = 14.1 \text{ mA} \sin(\omega t)$
- $u(t) = 0.5 \text{ V} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$
- $i_C(t) = 10 \text{ mA} \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$
- $i_R(t) = 10 \text{ mA} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$

9.4. Phasenanschnittsteuerung

Das Prinzip der Phasenanschnittsteuerung, bei dem gem. Abbildung 9.6a oder Abbildung 9.6b der Stromfluß in einer Halbwelle auf den zeitlichen Bruchteil $\pi - \alpha$ begrenzt wird, wird z.B. zum Dimmen von Glühlampen und anderen Kleinverbrauchern im Haushalt verwendet. Der Phasenanschnittwinkel α kann dabei elektronisch mit Thyristoren im Bereich $0 \leq \alpha \leq \pi$ eingestellt werden [21].

In den hier zu untersuchenden Fällen (a) und (b) wird ein ohmscher Verbraucher mit $R = 100 \Omega$ mit Netzspannung ($U_{0,eff} = 230 \text{ V}$, $\omega = 2\pi 50 \text{ Hz}$) und Phasenanschnittsteuerung betrieben.

9. Periodische Signale

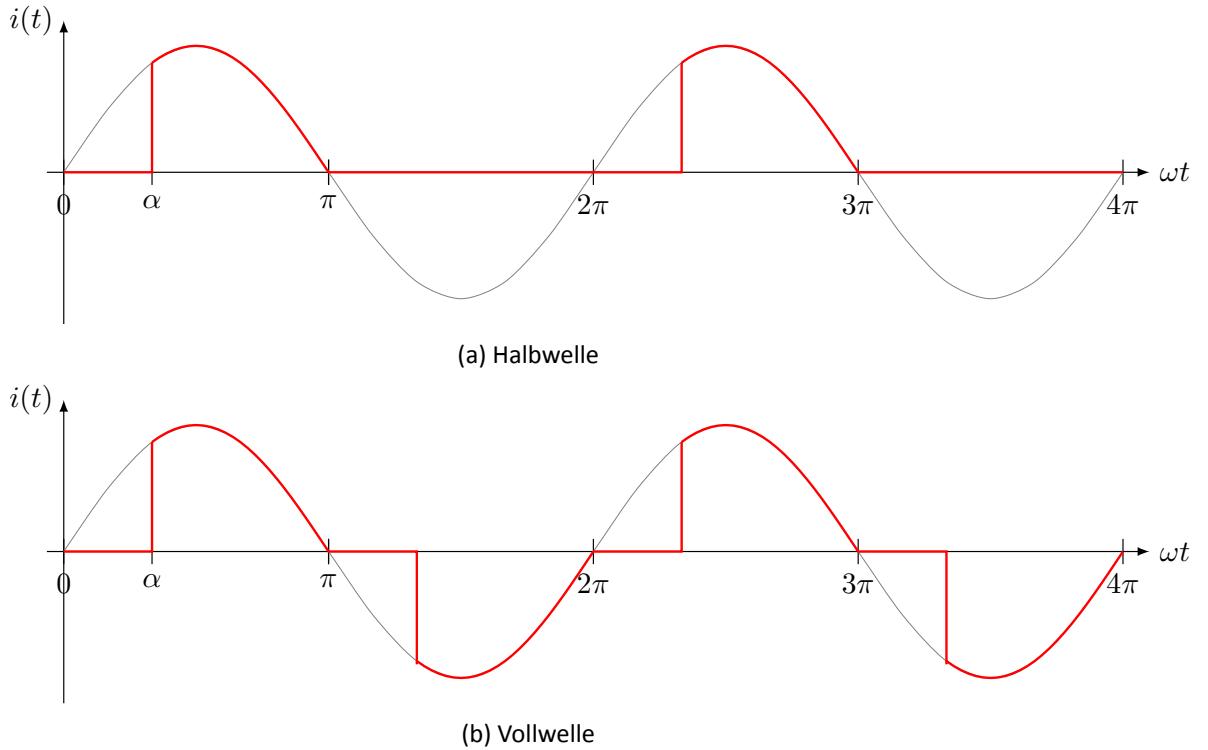


Abbildung 9.6.: Phasenanschnittsteuerung

9.4.1. Aufgabe

Berechnen und skizzieren Sie für den durch den Verbraucherwiderstand R fließenden Strom $i(t)$ jeweils Mittelwert, Gleichrichtmittelwert und Effektivwert als Funktion vom Phasenanschnittwinkel α !

Lösung

1. Halbwelle

$$\bar{i}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{\hat{I}}{\omega T} \int_{\alpha}^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi \quad (9.27)$$

$$= \frac{\hat{I}}{2\pi} [-\cos(\varphi)]_{\alpha}^{\pi} = \frac{\hat{I}}{2\pi} [1 + \cos(\alpha)] \quad (9.28)$$

$$\overline{|i(t)|} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{\hat{I}}{2\pi} [1 + \cos(\alpha)] \quad (9.29)$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{i^2(t)} dt = \frac{1}{\omega T} \int_{\alpha}^{\pi} \hat{I}^2 \sin^2(\varphi) d\varphi \quad (9.30)$$

$$= \frac{\hat{I}}{2\pi} \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right]_{\alpha}^{\pi} = \frac{\hat{I}}{2\pi} \left[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin(2\alpha) \right] \quad (9.31)$$

$$I_{eff} = \hat{I} \sqrt{\frac{\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)}{4\pi}} \quad (9.32)$$

2. Vollwelle

$$\overline{i(t)} = 0 \quad (9.33)$$

$$\overline{|i(t)|} = 2 \cdot \frac{\hat{I}}{2\pi} [1 + \cos(\varphi)] = \frac{\hat{I}}{\pi} [1 + \cos(\varphi)] \quad (9.34)$$

$$I_{eff}^2 = 2 \cdot \frac{\hat{I}}{2\pi} \left[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin(2\alpha) \right] \quad (9.35)$$

$$= \hat{I} \sqrt{\frac{\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)}{2\pi}} \quad (9.36)$$

10. Signale

10.1. Komplexe Signale

Mit einem Oszilloskop wird die Zeitabhängigkeit von zwei Sinussignalen, wie in Abbildung 10.1 dargestellt, gemessen.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Oszi-Plot
t = np.linspace(-10e-3, 10e-3, 100)
T = 8e-3
f = 1 / T
w = 2 * np.pi * f
A1 = 15
A2 = 10
dt = 1e-3

# Spannungen
u1 = -A1 * np.cos(w * t)
u2 = A2 * np.cos(w * (t - dt))

# Setting figure properties
plt.figure(1)
plt.plot(t, u1, label=r"$u_1(t)$")
plt.plot(t, u2, label=r"$u_2(t)$")

plt.axis([-5e-3, 5e-3, -20, 20])
plt.grid()
plt.xlabel('Zeit t/s')
plt.ylabel('Spannung u/V')
plt.legend()

plt.show()
```

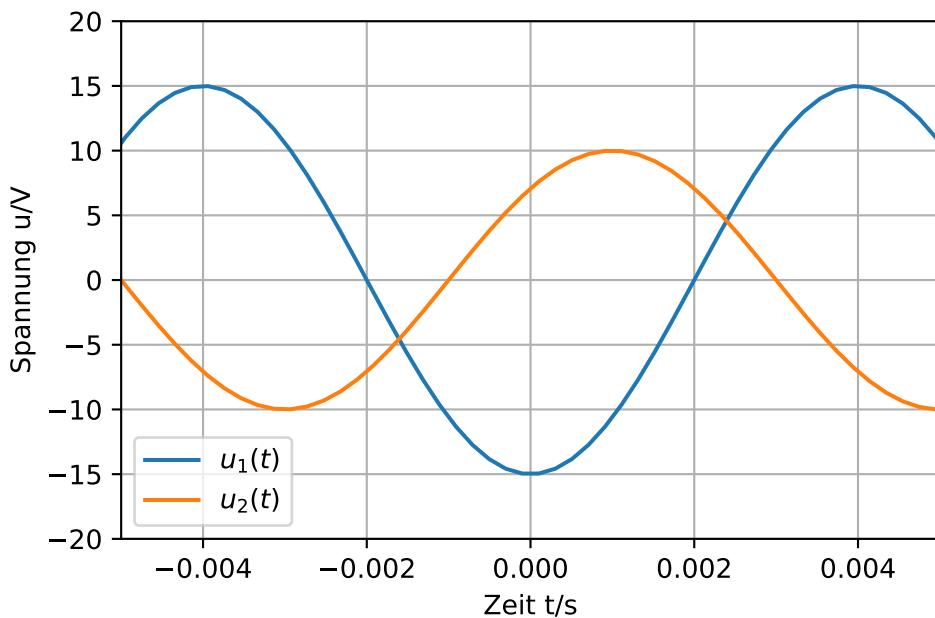


Abbildung 10.1.: Oszillogramm einer Spannungsmessung

10.1.1. Signaldarstellung

Geben Sie für die Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ folgende Größen an:

- die Periodendauer T
- die Frequenz f
- die Kreisfrequenz ω .

Lösung

$$T = 8 \text{ ms}$$

$$f = \frac{1}{T} = 125 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 785 \text{ rad/s}$$

10.1.2. Sinussignale

Geben Sie für die Darstellungen der Sinus- und Kosinussignale $u_i(t) = \hat{U}_i \sin(\omega t + \varphi_{ui})$ und $u_i(t) = \hat{U}_i \cos(\omega t + \psi_{ui})$ die Amplituden \hat{U}_i und die Phasen φ_{ui} und ψ_{ui} mit $i = 1, 2$ an.

🔥 Lösung

Die Amplituden der Spannungen sind $\hat{U}_1 = 15 \text{ V}$ und $\hat{U}_2 = 10 \text{ V}$. Die zeitlichen Verläufe können dann wie folgt angegeben werden:

$$u_1(t) = -\hat{U}_1 \cos(\omega t) = \hat{U}_1 \cos(\omega t \pm \pi)$$

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_2(t) = \hat{U}_2 \cos(\omega(t - 1 \text{ ms})) = \hat{U}_2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$u_2(t) = \hat{U}_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

10.1.3. Übertragungsfaktor

Wenn $u_1(t)$ die Eingangsspannung und $u_2(t)$ die Ausgangsspannung einer Schaltung bedeuten, wie groß ist dann der komplexe Übertragungsfaktor $\underline{H} = \underline{U}_2/\underline{U}_1$ der Schaltung?

🔥 Lösung

Die Umrechnung der reellen Spannungsverläufe in komplexe Größen geschieht über die Funktionaltransformation.

$$u(t) = \operatorname{Re} \{ \underline{u}(t) \} \quad (10.1)$$

$$= \operatorname{Re} \{ \underline{U} e^{j\omega t} \} \quad (10.2)$$

$$= \operatorname{Re} \{ \hat{U} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \} \quad (10.3)$$

$$= \operatorname{Re} \{ \hat{U} e^{j\omega t} e^{j\varphi_u} \} \quad (10.4)$$

$$= \operatorname{Re} \{ \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) + j \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \} \quad (10.5)$$

$\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$ rotierender Zeiger, komplexer Momentanwert

$\underline{u}(0) = \underline{U} e^{j0} = \underline{U} e^{j\varphi_u}$ ruhender Zeiger, komplexer Scheitelwert

$$\underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U} e^{j\varphi_u} \quad \text{komplexer Effektivwert}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U}_1 e^{-j\pi}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U}_2 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad (10.6)$$

$$= \frac{\hat{U}_2 e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\hat{U}_1 e^{-j\pi}} \quad (10.7)$$

$$= \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} e^{j(-\frac{\pi}{4} + \pi)} \quad (10.8)$$

$$= \frac{2}{3} e^{j\frac{3}{4}\pi} \quad (10.9)$$

10.1.4. Spannungsverlauf

Zeichnen Sie in das Oszillogramm den Verlauf der Spannung $u_3(t)$ mit der Frequenz $f = 100 \text{ Hz}$ und dem komplexen Scheitelwert $\hat{U}_3 = (15 - j20) \text{ V}$ (karthesische Koordinaten) ein.

🔥 Lösung

Darstellung des komplexen Scheitelwertes \hat{U}_3 in Polarkoordinaten, Betrag und Phase.

$$\hat{U}_3 = \sqrt{15^2 + 20^2} \exp \left(j \arctan \left(\frac{-20}{15} \right) \right) = 25e^{-j0.927}$$

$$u_3(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{U}_3 e^{j\omega_3 t} \} = 25 \cos(\omega_3 t - 0.927) = 25 \cos (\omega_3 (t - 1.43 \text{ ms}))$$

10.2. Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Oszi-Plot
t = np.linspace(0, 50e-3, 100)
Up = 44.7 # in V
Ip = 2 # in A
w = 2 * np.pi / 20e-3
dt = 13.5e-3

u1 = Up * np.sin(w * t)
i1 = -Ip * np.sin(w * (t - dt))

fig = plt.figure(1)
```

```

ax1 = fig.add_subplot(111)
ax1.plot(t, u1, 'b-', label='u(t)')
ax1.set_ylabel('Spannung u/V')
ax1.set_xlabel('Zeit t/s')
ax1.set_ylim(-50, 50)
ax1.grid()
ax1.text(25e-3, 44.7, r'$\leftarrow$ 44.7 V')

# Zweite y-Achse fuer den Strom
ax2 = ax1.twinx()
ax2.plot(t, i1, 'r-', label='i(t)')
ax2.set_ylabel('Strom i/A')
ax2.set_ylim(-5, 5)
ax2.text(13.5e-3, 0, r'$\leftarrow$ 13.5 ms')

# ask matplotlib for the plotted objects and their labels
lines, labels = ax1.get_legend_handles_labels()
lines2, labels2 = ax2.get_legend_handles_labels()
ax2.legend(lines + lines2, labels + labels2, loc=0)

plt.show()

```

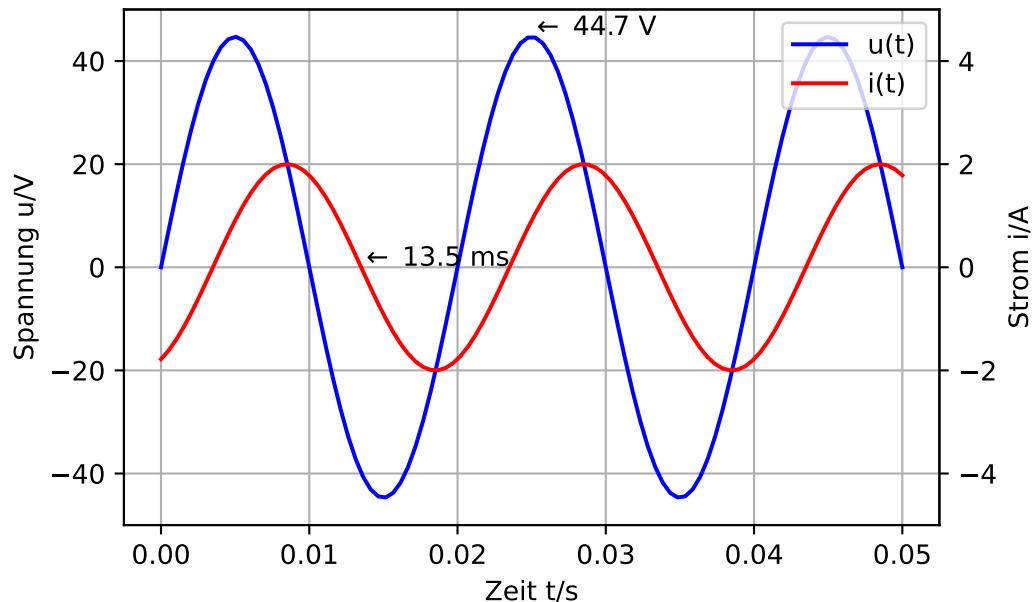


Abbildung 10.2.: Oszillogramm einer Strom- und Spannungsmessung

An einem Verbraucher mit der Impedanz Z wird mittels eines Zweistrahloszilloskops eine zeitaufgelöste Strommessung des Stroms $i(t)$ durchgeführt. Gleichzeitig wird die Klemmenspannung $u(t)$ mit aufgenommen. Beide Zeitfunktionen sind sinusförmig. Ihre Amplituden und relativen Lagen sind der Abbildung 10.2 zu entnehmen.

10.2.1. Strom- und Spannungsbeschreibung

Stellen Sie Strom und Spannung in reeller und komplexer Schreibweise dar.

Lösung

1. Reelle Schreibweise

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t); \quad \hat{U} = 44.7 \text{ V}$$

$$i(t) = -\hat{I} \sin(\omega(t - \Delta t)); \quad \hat{I} = 2 \text{ A}, \Delta t = 13.5 \text{ ms}$$

2. Komplexe Schreibweise

$$u(t) = \hat{U} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$i(t) = -\hat{I} \cos\left(\omega t - \omega \Delta t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \underline{I} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I} e^{-j(\omega \Delta t + \frac{\pi}{2})}$$

10.2.2. Komplexe Leistung

Geben Sie für den Verbraucher die komplexe Leistung $\underline{P} = P + jQ$ mit aufgenommener Wirkleistung P und aufgenommener Blindleistung Q an.

Lösung

$$\underline{P} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = -\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} e^{-j(\omega \Delta t)} = P + jQ$$

Koeffizientenvergleich:

$$P = \operatorname{Re} \{\underline{P}\} = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} e^{-j(\omega \Delta t)} \right\} = -\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\omega \Delta t) = 20 \text{ W}$$

$$Q = \operatorname{Im} \{\underline{P}\} = \operatorname{Im} \left\{ -\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} e^{-j(\omega \Delta t)} \right\} = -\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \sin(\omega \Delta t) = 40 \text{ VA}$$

10.2.3. Ersatzschaltung

Geben Sie eine Reihenschaltung und eine Parallelschaltung aus R-, L- und/oder C-Komponenten zur möglichen Realisierung des Verbrauchers an. Bestimmen Sie dazu die Komponentenwerte aus den gemessenen Strom- und Spannungsverläufen.

 Lösung

Reihen- oder Parallelschaltung aus Widerstand R und Induktivität L . Für die Reihenschaltung errechnen sich die Bauteilwerte wie folgt:

$$Z = \frac{U}{I} = -\frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{j\omega\Delta t} = (10 + j20) \Omega = R_s + j\omega L_s \quad (10.10)$$

$$R_s = 10 \Omega$$

$$L_s = \frac{20}{\omega} \Omega = 640 \text{ mH}$$

Für die Realisierung mit einer Parallelschaltung, Umrechnen der Impedanzwerte in Admittanzwerte.

$$Y = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2}$$

Ermittlung der Bauteilwerte für die Parallelschaltung durch Koeffizientenvergleich.

$$\frac{1}{R_p} = \frac{R_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2}; \quad R_p = 50 \Omega$$

$$\frac{1}{\omega L_p} = \frac{\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2}; \quad \omega L_p = 25 \Omega$$

$$L_p = 796 \text{ mH}$$

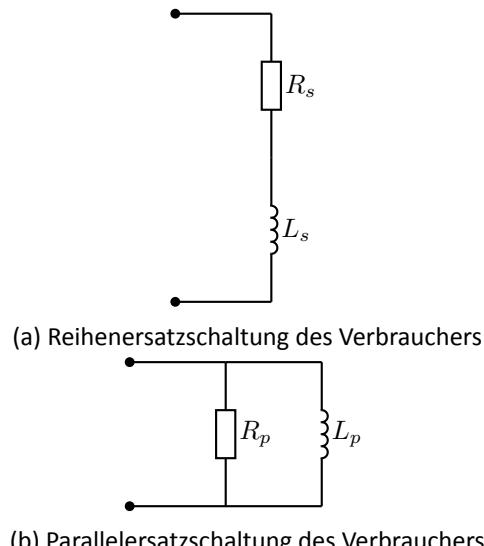


Abbildung 10.3.

11. Spannungsteiler

11.1. Schaltungsaufgabe mit Zeigerdiagramm

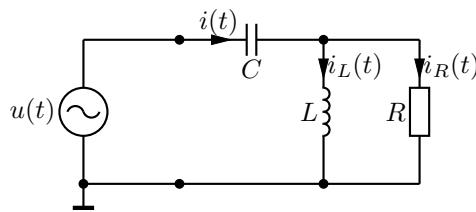


Abbildung 11.1.: RLC-Schaltung für das Zeigerdiagramm.

Gegeben ist die RLC-Schaltung in Abbildung 11.1. Dabei sind die Bauteilwerte $R = 100 \Omega$, $L = 1 \mu H$, $C = 1 nF$ und die Spannungsquelle $u(t) = \hat{U} \cos(\omega t)$ mit $\hat{U} = 1,41 V$ und $\omega = 2\pi 6 MHz$.

11.1.1. Zeigerdiagramm

Die Aufgabe besteht darin, das Zeigerdiagramm für alle Teilströme und Teilspannungen zu erstellen.

Schrittweise graphische Lösung

1. \vec{I}_R und \vec{U}_R sind reelle Zeiger in Phase. Diese beiden Zeiger als Bezug mit selbst definierten Längen einzeichnen, z.B. $\vec{I}_R = 5 cm$ und $\vec{U}_R = 10 cm$.
2. \vec{I}_L mit -90° bezüglich \vec{U}_R einzeichnen. Zur Bestimmung der Länge muss nun der Zeiger für den Strom durch die Induktivität im Bezug zum Zeiger für den Strom durch den Widerstand bestimmt werden, da Strom- und Spannungszeiger am Widerstand als Referenz für das Zeigerdiagramm zu Beginn gesetzt worden sind.

$$|\vec{I}_L| = \frac{|\vec{U}_L|}{\omega L} = \frac{|\vec{U}_R|}{\omega L} = \frac{|\vec{U}_L|}{R} \frac{R}{\omega L} = |\vec{I}_R| \cdot 2.65$$

3. Jetzt den Summenvektor für den Gesamtstrom $\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L$ einzeichnen.
4. Die Spannung am Kondensator mit -90° bezüglich \vec{I} einzeichnen. Wie auch schon beim Strom durch die Induktivität wird die Länge des Zeigers für die Spannung am Kondensator durch einen Faktor zum Referenzzeiger, \vec{U}_R , ausgedrückt.

11. Spannungsteiler

$$|\vec{U}_C| = \frac{|\vec{I}|}{\omega C} = \frac{|\vec{I}|}{|\vec{I}_R|} \cdot \frac{|\vec{I}_R|}{\omega C} = \frac{|\vec{I}|}{|\vec{I}_R|} \cdot R |\vec{I}_R| \cdot \frac{1}{\omega RC} = 2.85 \cdot |\vec{U}_R| \cdot 0.265 = 0.76 |\vec{U}_R|$$

5. Final den Summenvektor für die Quellenspannung einzeichnen; $\vec{U} = \vec{U}_C + \vec{U}_R$

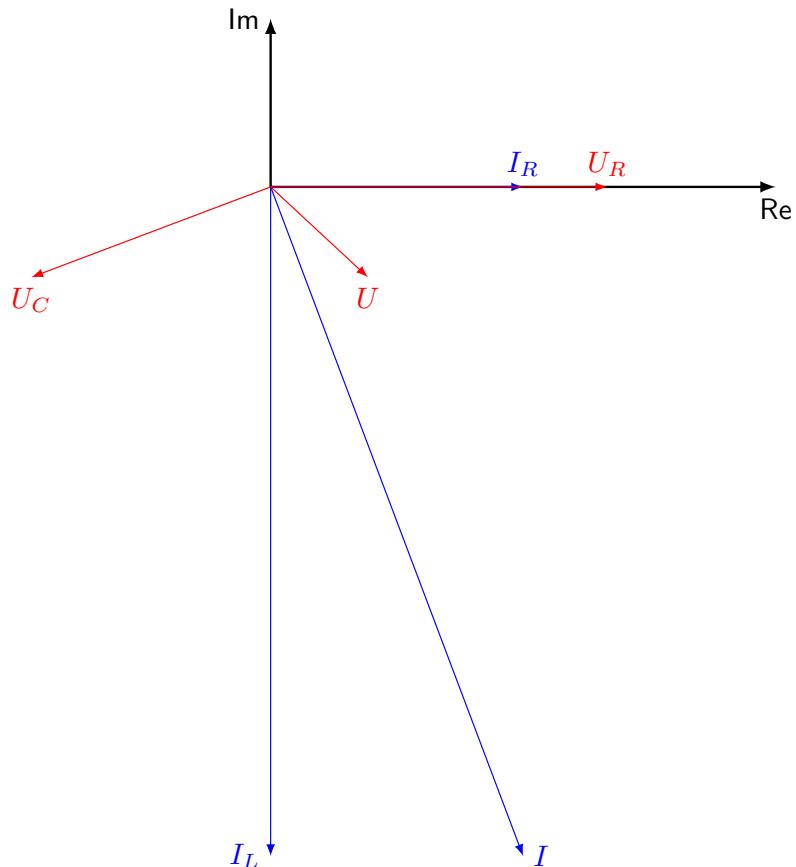


Abbildung 11.2.: Zeigerdiagramm.

11.2. Kompensierter Spannungsteiler

Die abgebildete Schaltung in Abbildung 11.3 stellt das Prinzip eines Oszilloskopkopftastkopfes dar, ein sogenannter kompensierter Spannungsteiler. Dabei bezeichnen R und C Widerstand und Kapazität des Oszilloskopeingangs. $R_1 = 9 M\Omega$, $R = 1 M\Omega$, $R_2 = 1 M\Omega$, $C = 10 pF$.

vgl. Kapazitiver Spannungsteiler [7]

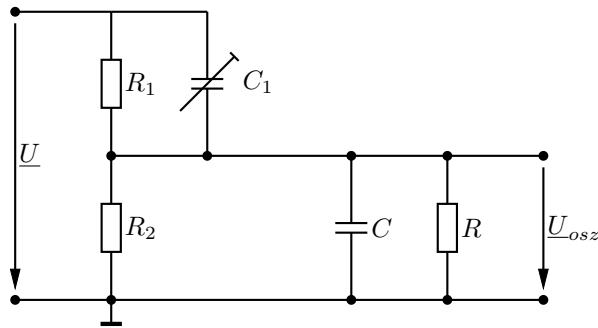


Abbildung 11.3.: Ersatzschaltbild eines Oszilloskop-Tastkopfes.

11.2.1. Spannungsteiler

Leiten Sie den Spannungsübergangsfaktor $H_u = \underline{U}_{osz} / \underline{U}$ allgemein für die angegebenen Bauteile her?

Lösung

Zeichnen Sie ein vereinfachtes Ersatzschaltbild mit zusammengefassten Impedanzen Z_1 und Z_2 .

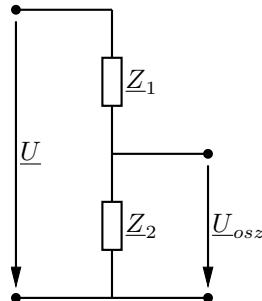


Abbildung 11.4.: Ersatzschaltbild des Tastkopfes zusammengefasst.

$$Z_1 = \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1} + R_1} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$Z_2 = \frac{R_{2g}}{1 + j\omega R_{2g} C}, \quad \text{wobei} \quad R_{2g} = \frac{R_2 R}{R_2 + R}$$

Mit diesen Definitionen bestimmt man das Spannungsverhältnis:

$$H_u = \frac{\underline{U}_{osz}}{\underline{U}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

11. Spannungsteiler

11.2.2. Eingangsimpedanz

Wie groß ist die Eingangsimpedanz $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ des Tastkopfes?

🔥 Lösung

Mit den Vorarbeiten aus Kapitel 11.2.1 kann man an dieser Stelle die Eingangsimpedanz des Tastkopfes als Reihenschaltung der Impedanzen Z_1 und Z_2 notieren.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} + \frac{R_{2g}}{1 + j\omega R_{2g} C}$$

11.2.3. Kapazität

Wie muß die Kapazität C_1 gewählt werden, damit das Verhältnis $\underline{H} = \underline{U}_{osz}/\underline{U}$ für alle Frequenzen gleich groß ist?

🔥 Lösung

Ähnlich einer Abgleichbedingung für eine Wechselstrommessbrücke kann man an dieser Stelle argumentieren, dass das Spannungsverhältnis \underline{H} für alle Frequenzen gleich groß ist, sofern $R_1 C_1 = R_{2g} C$ gilt.

Die mathematische/ingenieurische Begründung ist wie folgt:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_{2g}} + j\omega C$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_{osz}}{\underline{U}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1}{\frac{1}{R_{2g}} + j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{2g}} \frac{1 + j\omega R_{2g} C}{1 + j\omega R_1 C_1}}$$

Hieraus folgt dann die Bestimmungsgleichung für den Kondensator C_1 :

$$C_1 = \frac{R_{2g}}{R_1} C = \frac{0.5}{9} 10 \text{ pF} = 0.55 \text{ pF}.$$

11.3. RC-Spannungsteiler

Gegeben ist der abgebildete Spannungsteiler in Abbildung 11.7 mit zwei Widerständen und einem Kondensator.

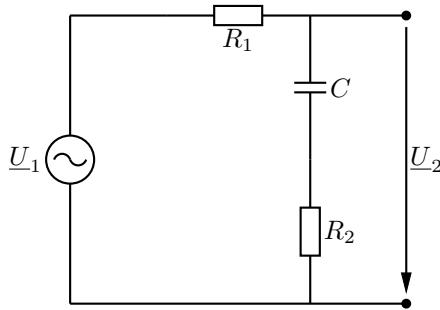


Abbildung 11.5.: RC-Spannungsteiler

11.3.1. Spannungsverhältnis

Berechnen Sie den komplexen Spannungsübertragungsfaktor $\underline{H}_u = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$.

Lösung

Fassen Sie die Bauteile zu Impedanzen Z_1 und Z_2 zusammen. Das gesuchte Spannungsverhältnis erhalten Sie aus der Spannungsteilerregel.

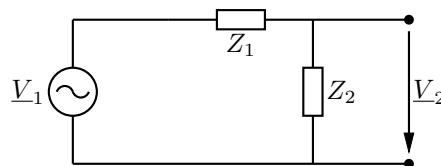


Abbildung 11.6.: RC-Spannungsteiler zusammengefasst.

$$Z_1 = R_1 Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega (R_1 + R_2) C}$$

11.3.2. Betrag und Phase

Stellen Sie den Betrag und den Phasenwinkel von \underline{H}_u als Funktion von ω für den Fall $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$ und $C = 1 \mu F$ mit Python dar.

Lösung

Mit der Vorarbeit aus Kapitel 11.2.1 können Sie die Ausdrücke für Betrag und Phase der Spannungsübertragungsfunktion \underline{H} direkt ablesen. Der Betrag ist der Quotient der Beträge von Zähler und Nenner.

11. Spannungsteiler

$$|\underline{H}| = \frac{|1 + j\omega R_2 C|}{|1 + j\omega(R_1 + R_2)C|} = \frac{\sqrt{1 + (\omega R_2 C)^2}}{\sqrt{1 + (\omega(R_1 + R_2)C)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{1 + (\omega(R_1 + R_2)C)^2}}$$

Für die Phase, das Argument von \underline{H} , kann auch der Quotient der Argumente von Zähler und Nenner gebildet werden.

$$\arg(\underline{H}) = \frac{\arg(1 + j\omega R_2 C)}{\arg(1 + j\omega(R_1 + R_2)C)} = \frac{\arctan(\omega R_2 C)}{\arctan(\omega(R_1 + R_2)C)} = \arctan(\omega R_2 C) - \arctan(\omega(R_1 + R_2)C)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definitionen

# Datenbereich
f = np.logspace(0, 6)    # Hz logarithmisch
w = 2 * np.pi * f

# Bauteilwerte
R1 = 1
R2 = 100
C = 1e-6

# Übertragungsfunktion
H_u = (1 + 1j * w * R2 * C) / (1 + 1j * w * (R1 + R2) * C)

# Erstellen des Bode-Diagramms

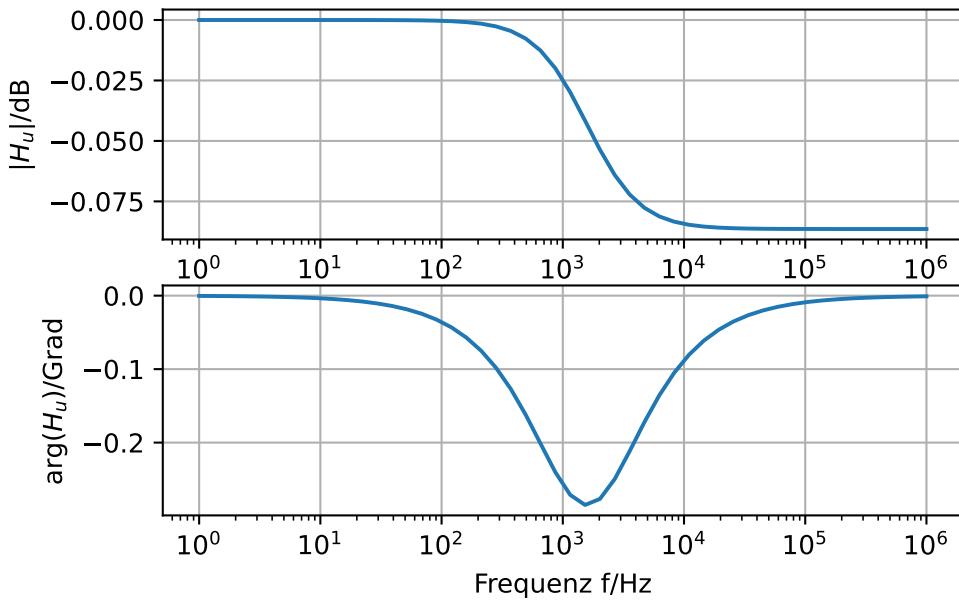
# Mit direkten Funktionen aus numpy
fig1 = plt.figure(1)

# Frequenzgang
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.semilogx(f, 20*np.log10(np.abs(H_u)))
plt.grid()
plt.ylabel(r'$|\underline{H}_u|$ dB')

# Phase
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.semilogx(f, np.rad2deg(np.angle(H_u)))
plt.grid()
plt.ylabel(r'$\arg(\underline{H}_u)$ Grad')
plt.xlabel('Frequenz f/Hz')
```

Text(0.5, 0, 'Frequenz f/Hz')

(a) Bode-Diagramm



(b)

Abbildung 11.7.

12. Bode-Diagramm und Nyquist-Ortskurve

12.1. Schaltungsanalyse mit dem Bode-Diagramm

Im Labor ist mit einem Vektornetzwerkanalysator das Bode-Diagramm eines Zweitors aufgenommen worden. In Abbildung 12.1 sind Betrag $|H_u|$ und Phase $\arg(H_u)$ der Spannungsübertragungsfunktion von Tor 1 auf Tor 2, $H_u = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$, abgebildet.

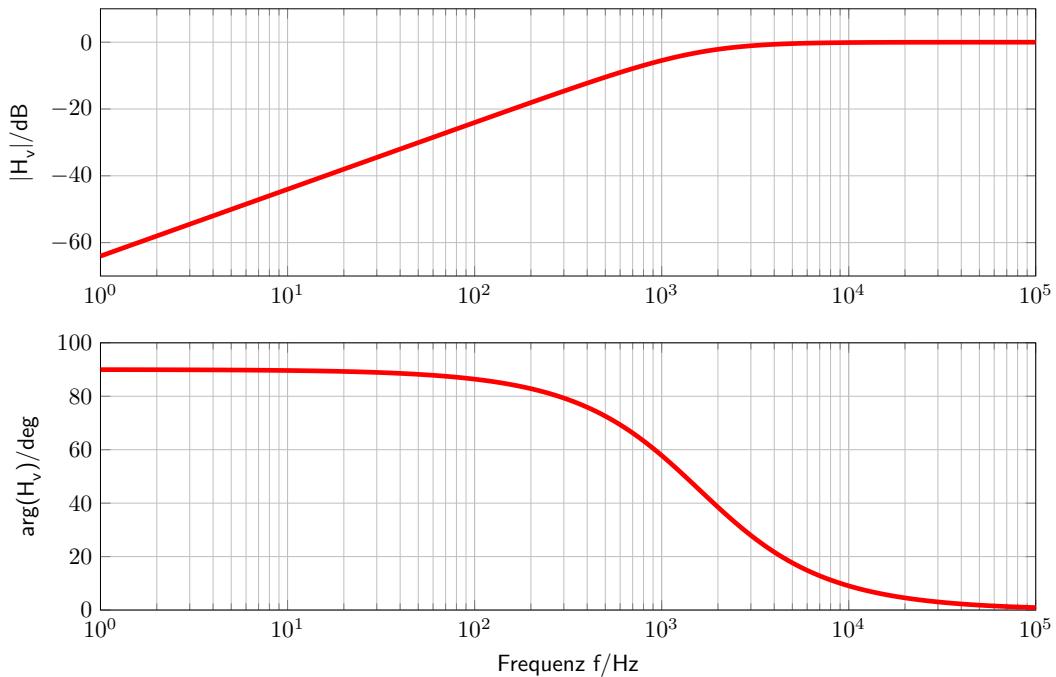


Abbildung 12.1.: Bode-Diagramm des Zweitors

12.1.1. Funktion

Welche Funktion erfüllt das gemessene Zweitor?

Lösung

Das gemessene Zweitor hat die Funktion eines Hochpassfilters.

12.1.2. Bauteilanordnung

Welche Bauteilanordnung vermuten Sie zwischen den zwei Toren? Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild des Zweitors mit Eingangsspannung \underline{U}_1 und Ausgangsspannung \underline{U}_2 .

Lösung

In einfachster Ausführung kann man einen Hochpass durch einen Spannungsteiler mit Kapazität C und Widerstand R realisieren.

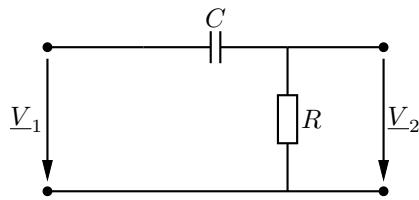


Abbildung 12.2.: Einfacher RC-Hochpass, Zweitor-Ersatzschaltbild

12.1.3. Spannungsübertragungsfunktion

Leiten Sie die Spannungsübertragungsfunktion, $H_u = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$, Ihres Ersatzschaltbildes her.

Lösung

$$H_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

12.1.4. Betrag und Phase

Bestimmen Sie Betrag und Phase der Spannungsübertragungsfunktion H_u .

Lösung

$$|H_u| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(H_u) = \arg(H_u) = \arg\left(\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\right) = \arg\left(\underbrace{\frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}}_{\text{Re}} + j\underbrace{\frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}}_{\text{Im}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

12.1.5. 3 dB-Grenzfrequenz

Leiten Sie eine Bestimmungsgleichung für die 3 dB-Grenzfrequenz f_g der Spannungsübertragungsfunktion her.

i Hinweis

Die Grenzfrequenz kennzeichnet die Frequenz, bei der der Betrag auf -3 dB abfällt und die Phase 45 Grad beträgt.

🔥 Lösung

Es gibt zwei Lösungswege:

$$|H_u| = -3 \text{ dB} = \frac{1}{\sqrt{2}_{lin}} = \frac{\omega_g RC}{\sqrt{1 + (\omega_g RC)^2}} \arg(H_u) = \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{\omega_g RC}\right)$$

$$\Rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

Alternativ auch der Ansatz aus der Elektronik-Fibel:

$$R = X_C$$

$$R = \frac{1}{\omega_g C}$$

$$R = \frac{1}{2\pi f_g C}$$

$$\Rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

12.1.6. Grenzfrequenz

Wie groß ist die Grenzfrequenz für $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 100 \text{ nF}$?

🔥 Lösung

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = 10 \text{ kHz}$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC} \approx 1.6 \text{ kHz}$$

12.2. Ortskurve einer Zweipol-Admittanz

Konstruieren Sie eine Ortskurve der Admittanz $Y(\omega)$ für den skizzierten Zweipol in Abbildung 12.3. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie ausgezeichnete Frequenzwerte betrachten. Die Werte der Bauteile lauten $R_s = 50 \Omega$, $R_p = 200 \Omega$ und $C = 2 \mu F$.

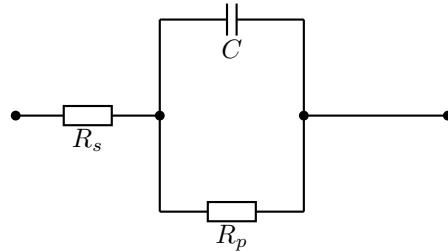


Abbildung 12.3.: Zweipol-Admittanz

12.3. Ortskurve mit verschiedenen Parametern

Gegeben sei nachfolgende RLC-Schaltung in Abbildung 12.4. Die Werte der Bauteile lauten $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$, $L = 200 \mu H$ und $C = 5 nF$.

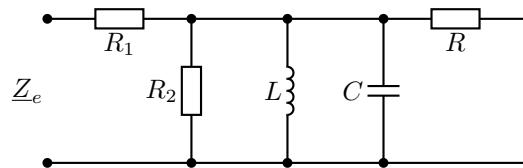


Abbildung 12.4.: RLC-Schaltung

12.3.1. Ortskurve mit ω als Parameter

$f(\omega)$ Konstruieren Sie die Ortskurve der Eingangsimpedanz Z_e mit der Kreisfrequenz ω als Parameter, $0 \leq \omega \leq \infty$. Dabei sei der Widerstand $R = 200 \Omega$.

Lösung

$$\underline{Y}_p = \frac{1}{\underline{Z}_p} = \underbrace{\frac{1}{R}}_{\frac{1}{R_3}=10 mS} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

- Ortskurve für $\underline{Y}_p(\omega) = \frac{1}{R_3} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$ zeichnen, eine Gerade.
- Ortskurve invertieren, $\underline{Y}_p \rightarrow \underline{Z}_p$, ergibt einen Kreis. $\underline{Z}_p(\omega_0) = R_3 = 100 \Omega$, Resonanzkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\underline{Z}_p(\infty) = \underline{Z}_p(0) = 0$
- Ortskurve verschieben, $\underline{Z}_e(\omega) = \underline{Z}_p(\omega) + R_1$

12.3. Ortskurve mit verschiedenen Parametern

```
# %% Import der Bibliotheken
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Definition der Variablen
R = 200.0
R1 = 60.0
R2 = 200.0
L = 200e-6
C = 5e-9

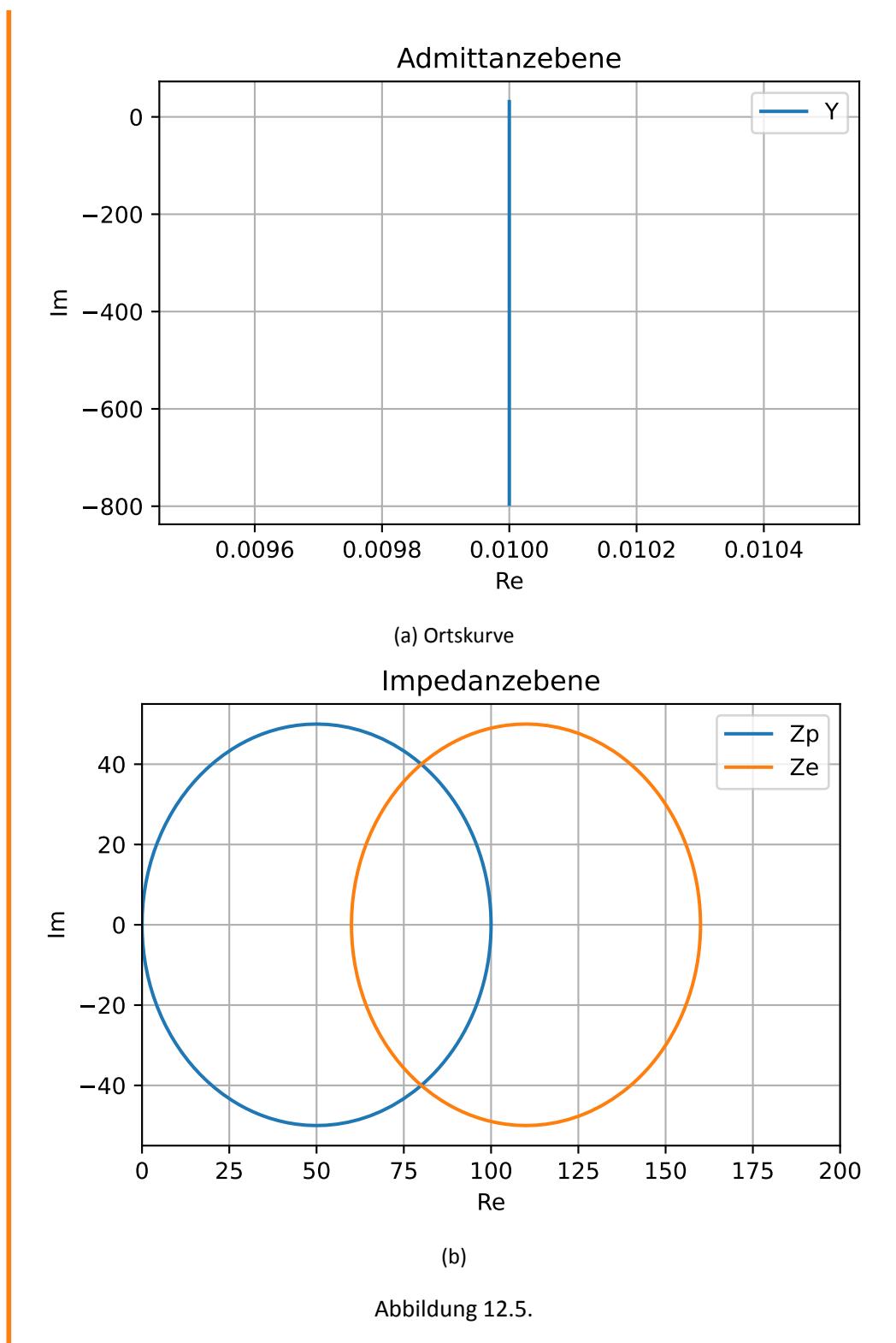
f = np.logspace(0, 9, 1000)
w = 2 * np.pi * f

# %% Definition der Impedanzen/Admittanzen
Yp = 1 / R + 1 / R2 + 1 / (1j * w * L) + 1j * w * C
Zp = 1 / Yp
Ze = Zp + R1

# %% Ortskurven plotten
fig1 = plt.figure(1)
plt.title('Admittanzebene')
plt.plot(np.real(Yp), np.imag(Yp))
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.legend(['Yp'])
plt.grid()
plt.show()

fig2 = plt.figure(2)
plt.title('Impedanzebene')
plt.plot(np.real(Zp), np.imag(Zp), np.real(Ze), np.imag(Ze))
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.axis([0, 200, -55, 55])
plt.legend(['Zp', 'Ze'])
plt.grid()
plt.show()
```

12. Bode-Diagramm und Nyquist-Ortskurve



12.3.2. Ortskurve mit R als Parameter

Konstruieren Sie die Ortskurve der Eingangsimpedanz \underline{Z}_e mit dem Widerstand R als Parameter, $0 \leq R \leq \infty$. Dabei sei die Kreisfrequenz $\omega = 1.5e61/s$.

Lösung

$$\underline{Y}_p = \frac{1}{R_3} + j4.17 mS$$

R_3 ist Funktion von R , $R_3 = R_3(R)$, mit $R = 0 \Rightarrow R_3 = 0$ und $R \rightarrow \infty \Rightarrow R_3 \rightarrow R_2 = 200 \Omega$

- $\underline{Y}_p(R_3)$ zeichnen: Teil einer horizontalen Geraden in der komplexen Ebene $0 \leq R_3 \leq 200 \Omega$ bzw. $5 mS \leq \frac{1}{R_3} \leq \infty$
- Ortskurve invertieren, dazu
 - die gesamte Gerade invertieren \rightarrow Kreis
 - Anfangspunkt von \underline{Y}_p invertieren

$\Rightarrow \underline{Z}_p$ ist ein Kreisabschnitt.
- Ortskurve verschieben, $\underline{Z}_e = \underline{Z}_p + R_1$.

12. Bode-Diagramm und Nyquist-Ortskurve

```
# %% Bibliotheken
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Def. der Variablen
R1 = 60
R2 = 200
L = 200e-6
C = 5e-9

w = 1.5e6
R = np.logspace(0, 9)

# %% Def. der Impedanzen/Admittanzen
Yp = 1 / R + 1 / R2 + 1 / (1j * w * L) + 1j * w * C
Zp = 1. / Yp
Ze = Zp + R1

# %% Ortskurven
fig1 = plt.figure(1)
plt.title('Admittanzebene')
plt.plot(Yp.real, Yp.imag)
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.grid()
plt.show()

fig2 = plt.figure(2)
plt.title('Impedanzebene')
plt.plot(Zp.real, Zp.imag, Ze.real, Ze.imag)
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.grid()
plt.axis([0, 200, -55, 55])
plt.show()
```

12.3. Ortskurve mit verschiedenen Parametern

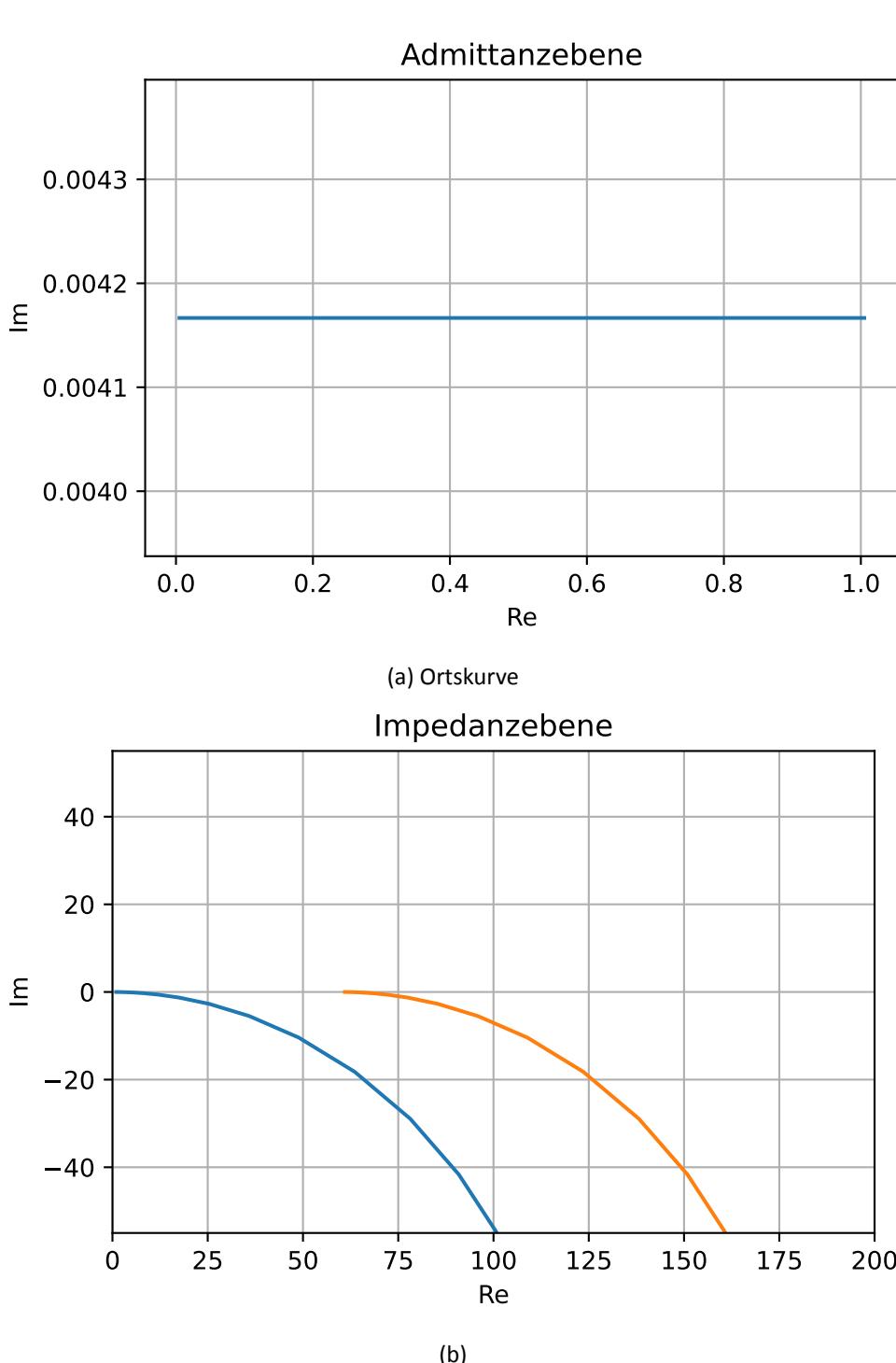


Abbildung 12.6.

13. Anpassung und Wechselstrommessbrücke

13.1. Blindleistungskompensation

Ein Verbraucher \underline{Z}_L wird über eine näherungsweise verlustlose Leitung aus dem Netz versorgt ($f = 50 \text{ Hz}$), $U_{eff} = 230 \text{ V}$. Er nimmt eine Wirkleistung von $P = 5 \text{ kW}$ und eine Blindleistung von $Q = 4,5 \text{ kvar}$ auf.

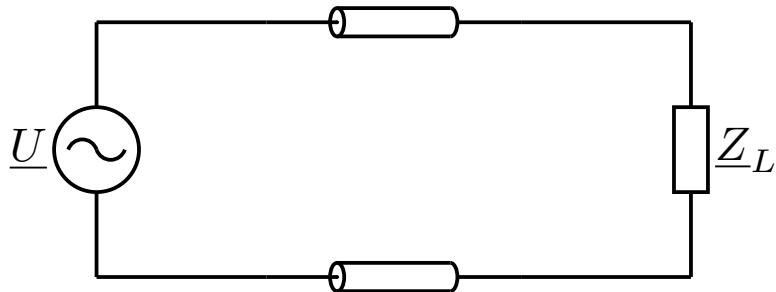


Abbildung 13.1.: Ersatzschaltbild des Versorgungsnetzes mit Verbraucher

13.1.1. Leistungsfaktor

Wie groß ist der Leistungsfaktor $\cos \phi$?

🔥 Lösung

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \phi \quad (13.1)$$

$$Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin \phi \quad (13.2)$$

$$\cos \phi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0,74 \quad (13.3)$$

13.1.2. Auslegung

Für welchen Effektivwert des Stromes I_{eff} muß die Leitung ausgelegt sein?

13. Anpassung und Wechselstrommessbrücke

Lösung

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_{eff} \cdot I_{eff} = 6,73 \text{ kVA} \quad (13.4)$$

$$I_{eff} = 29,2 \text{ A} \quad (13.5)$$

13.1.3. Zusätzlicher Verbraucher

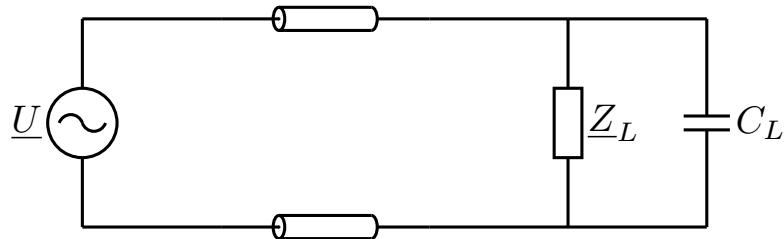


Abbildung 13.2.: Ersatzschaltbild des Versorgungsnetzes mit Verbraucher und zusätzlicher Kondensatorbatterie.

An die Anschlüsse des Verbrauchers wird zusätzlich eine Kondensatorbatterie von $C_L = 188 \mu\text{F}$ parallel gelegt. Wie groß ist nun der Leistungsfaktor $\cos \phi$ und der Effektivwert I_{eff} des Stromes?

Lösung

Der Gesamtstrom ist:

$$\underline{I}_{ges} = \underline{I}_Z + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} + j\omega C \underline{U}$$

Die Leistung an der Kondensatorbatterie:

$$P_C = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}_{ges}^* \quad (13.6)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{Z}^*} - \frac{1}{2} j \omega C |\underline{U}|^2 \quad (13.7)$$

Neue Wirk- und Blindleistung:

$$P_{neu} = P = 5 \text{ kW}$$

$$Q_{neu} = Q = \omega C U_{eff}^2 = 1,67 \text{ kVA}$$

Daraus folgt der neue Leistungsfaktor:

$$\cos \phi_{neu} = \frac{5 \text{ kW}}{\sqrt{(5 \text{ kW})^2 + (1,67 \text{ kVA})^2}} = 0.95$$

Der Effektivwert des Stromes:

$$S_{neu} = \sqrt{P_{neu}^2 + Q_{neu}^2} = U_{eff} \cdot I_{eff,neu} = 5,26 \text{ kVA}$$

$$I_{eff,neu} = 23,2 \text{ A}$$

13.2. Anpassung einer Heizeinrichtung

Zur Erwärmung von Werkstücken in einer Härteanlage wird ein Mittelfrequenzgenerator ($f = 20 \text{ kHz}$ bis 200 kHz) mit folgendem Ersatzschaltbild Abbildung 13.3 eingesetzt.

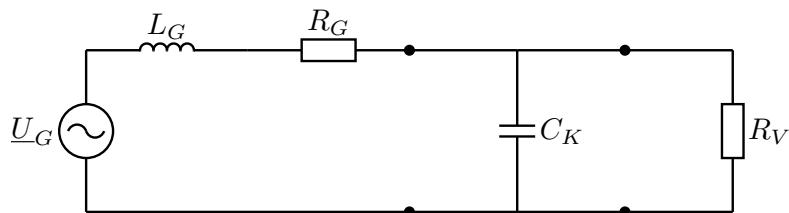


Abbildung 13.3.: Ersatzschaltbild des Mittelfrequenzgenerators.

Bei der Erhitzung durch Stromdurchgang wirkt das Werkstück als ohmscher Widerstand R_V , dessen Wert durch die Abmessungen frei wählbar ist. Es wird an den Generator $U_{G,eff} = 300 \text{ V}$, $R_G = 18 \Omega$, $L_G = 2 \text{ mH}$ über ein Kabel angeschlossen, dessen Leitungskapazität $C_K = 1,5 \text{ nF}$ ist.

13.2.1.

Bestimmen Sie den Wert von R_V und die Frequenz f_0 für den Anpassungsfall, bei dem also die Leistungsaufnahme des Werkstückes maximal wird.

13. Anpassung und Wechselstrommessbrücke

Lösung

$$Z_G = Z_V^* \quad (13.8)$$

$$R_G + j\omega L_G = \left(\frac{R_V}{1 + j\omega C_K R_V} \right)^* \quad (13.9)$$

$$R_G = \frac{R_V}{1 + (\omega C_K R_V)^2} \quad (13.10)$$

$$L_G = \frac{R_V^2 C_K}{1 + (\omega C_K R_V)^2} \quad (13.11)$$

$$R_V = \frac{L_G}{C_K R_G} \quad (13.12)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{L_G C_K} - \frac{R_G^2}{L_G^2} \quad (13.13)$$

$$R_V = 74,1 \text{ k}\Omega \quad (13.14)$$

$$f = 91,9 \text{ kHz} \quad (13.15)$$

13.2.2.

Wie groß ist diese Leistung?

Lösung

$$P_{total} = \frac{U_{eff}^2}{R_G + \underbrace{\operatorname{Re}(Z_V)}_{=R_G}} = \frac{U_{eff}^2}{2R_G} \quad (13.16)$$

$$P_V = \frac{1}{2} P_{total} = \frac{U_{eff}^2}{4R_G} = 1,25 \text{ kW} \quad (13.17)$$

Alternativ auch Lösung über den Spannungsteiler

$$U_{eff,V} = \frac{\operatorname{Re}(Z_V)}{R_G + \operatorname{Re}(Z_V)} U_{eff} = \frac{1}{2} U_{eff} \quad (13.18)$$

$$P_V = \frac{U_{eff,V}^2}{\operatorname{Re}(Z_V)} = \frac{1}{4} \frac{U_{eff}^2}{R_G} = 1,25 \text{ kW} \quad (13.19)$$

13.3. Wien-Robinson-Brücke

Die abgebildete Wechselstrommessbrücke kann als Sperrfilter eingesetzt werden. Sie bildet auch den passiven Teil eines Wien-Robinson-Oszillators [11].

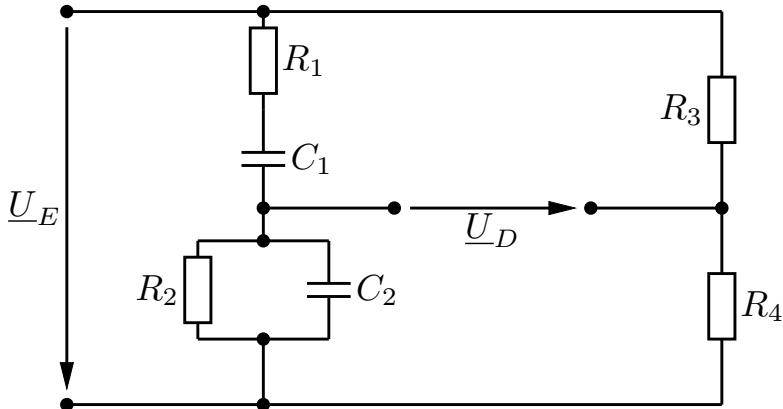


Abbildung 13.4.: Wien-Robinson-Brücke

13.3.1. Widerstandsverhältnis

Welches Widerstandsverhältnis R_3/R_4 muss gewählt werden, wenn $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$, damit die Brücke abgeglichen werden kann?

Lösung

Abgleichbedingung:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (13.20)$$

$$\left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right) = \frac{R_3}{R_4} \quad (13.21)$$

$$2 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC} = \frac{R_3}{R_4} \quad (13.22)$$

$$(13.23)$$

Wenn man Real- und Imaginärteil der rechten und linken Seite vergleicht (Abgleich), so kann die Brücke nur abgeglichen werden, wenn das Widerstandsverhältnis $R_3/R_4 = 2$ ist.

13.3.2. Kreisfrequenz

Für welche Kreisfrequenz ω_A ist die Brücke bei $R_3 = 2R_4$ abgeglichen?

Lösung

Die Brücke ist abgeglichen, somit folgt

13. Anpassung und Wechselstrommessbrücke

$$j\omega_A RC + \frac{1}{j\omega_A RC} = 0 \quad (13.24)$$

$$\omega_A RC = \frac{1}{\omega_A RC} \quad (13.25)$$

$$\omega_A = \frac{1}{RC} \quad (13.26)$$

(13.27)

13.3.3. Ortskurve

Zeichnen Sie die Ortskurve von $Z_1(\omega) = R_1 + 1/(j\omega C_1)$ und $Z_2 = R_2||C_2$ in einem Diagramm. Markieren Sie die Punkte $Z_1(\omega_A)$ und $Z_2(\omega_A)$ in den Ortskurven der beiden Impedanzen.

Lösung

Bei $\omega = \omega_A$ ist $\underline{Z}_1/\underline{Z}_2 = 2/1$ und gleichen Verhältnissen auf den Achsen (Re und Im) ist der Graph durch $\underline{Z}_1(\omega_A)$ und $\underline{Z}_2(\omega_A)$ eine Gerade, deren Mittelpunkt auf der Ortskurve von \underline{Z}_2 liegt.

```

# %% Bibliotheken
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Def. der Variablen
R = 1e3
C = 1e-6
wA = 1 / (R*C)

f = np.logspace(0, 9, 1000)
w = 2 * np.pi * f

# %% Def. der Impedanzen/Admittanzen
Y2 = 1 / R + 1j * w * C
Z2 = 1. / Y2
Z1 = R + 1 / (1j * w * C)

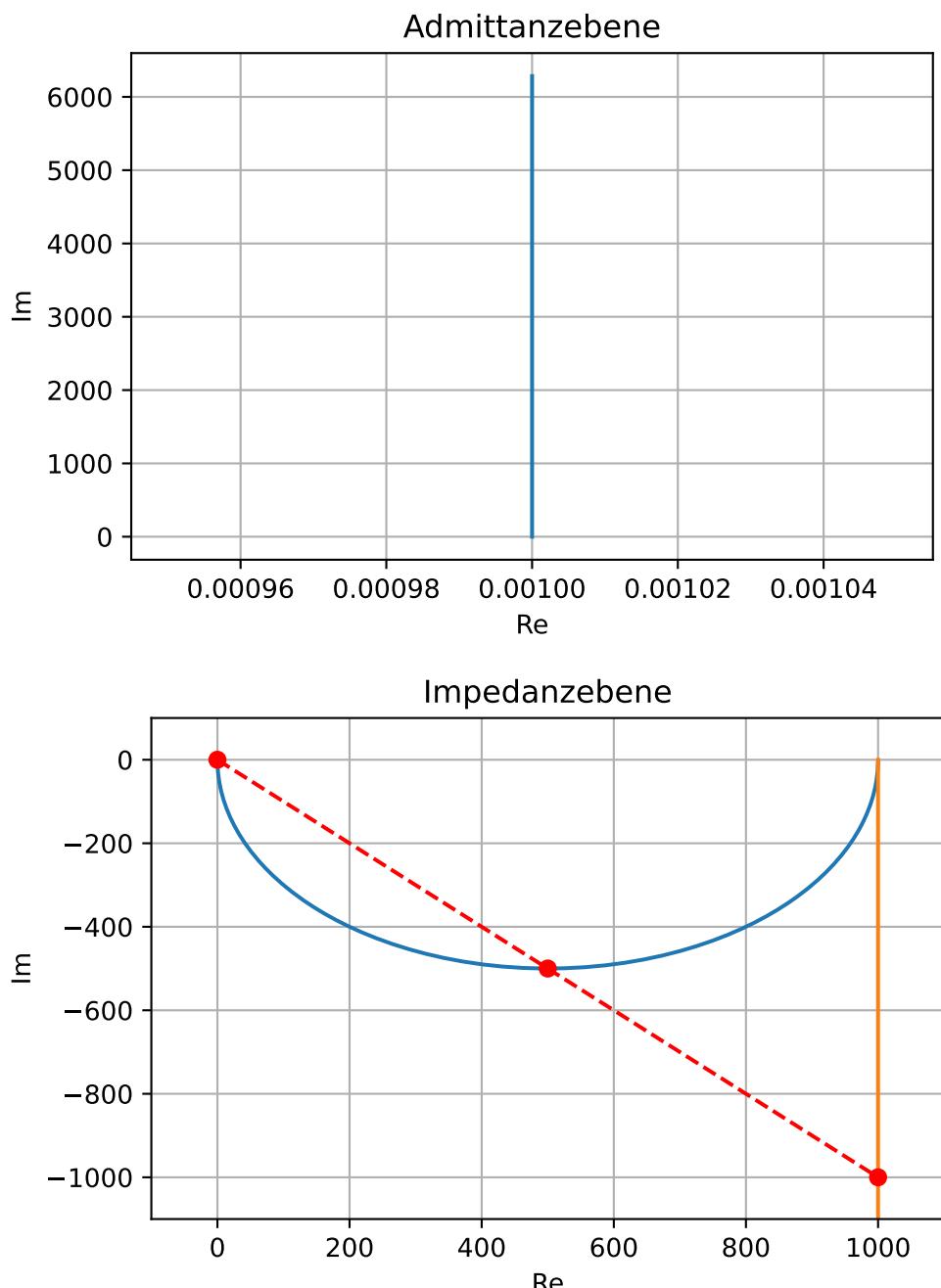
x1 = [0, 500, 1000]
y1 = [0, -500, -1000]

# %% Ortskurven
fig1 = plt.figure(1)
plt.title('Admittanzebene')
plt.plot(Y2.real, Y2.imag)
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.grid()
plt.show()

fig2 = plt.figure(2)
plt.title('Impedanzebene')
plt.plot(Z2.real, Z2.imag, Z1.real, Z1.imag)
plt.plot(x1, y1, '--', marker='o', color='red')
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.grid()
plt.axis([-100, 1100, -1100, 100])
plt.show()

```

13. Anpassung und Wechselstrommessbrücke



13.3.4. Übertragungsfaktor

Berechnen Sie das Spannungsübertragungsverhältnis $\underline{H}_v = \underline{U}_D / \underline{U}_E$ von Ausgangs- zu Eingangsspannung. Stellen Sie den Betrag und den Phasenwinkel von \underline{H}_v als Funktion von ω / ω_A dar!

 Lösung

Maschenumlauf: $\underline{U}_2 - \underline{U}_4 - \underline{U}_D = 0$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_E \quad (13.28)$$

$$\underline{U}_4 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \underline{U}_E \quad (13.29)$$

$$\underline{U}_D = \underline{U}_4 - \underline{U}_2 \quad (13.30)$$

$$= \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right) \underline{U}_E \quad (13.31)$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_4}} - \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} \right) \underline{U}_E \quad (13.32)$$

Hieraus folgt das Spannungsübertragungsverhältnis:

$$\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_D}{\underline{U}_E} \quad (13.33)$$

$$= \frac{1}{1 + 2} - \frac{1}{1 + (2 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC})} \quad (13.34)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{1 + j\frac{1}{3}(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})} \right) \quad (13.35)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{j\frac{1}{3}(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})}{1 + j\frac{1}{3}(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})} \quad (13.36)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 - j\frac{3}{\omega RC - \frac{1}{\omega RC}}} \quad (13.37)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 - j\frac{3}{\omega/\omega_A - \omega_A/\omega}} \quad (13.38)$$

Betrag und Phase des Spannungsübertragungsverhältnisses:

$$|\underline{H}_u| = \frac{1}{3\sqrt{1 + \left(\frac{3}{\omega/\omega_A - \omega_A/\omega}\right)^2}} \quad (13.39)$$

$$\arg(\underline{H}_u) = \arctan\left(\frac{3}{\omega/\omega_A - \omega_A/\omega}\right) \quad (13.40)$$

14. Leistungsanpassung und Schwingkreis

14.1. Leistungsberechnung

An eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung \underline{U}_0 , der inneren Impedanz $Z_i = R_i + j\omega L_i$ und der Kreisfrequenz ω ist ein Widerstand R_2 angeschlossen. In Reihe mit dem Widerstand R_2 soll ein Kondensator C_2 geschaltet werden.

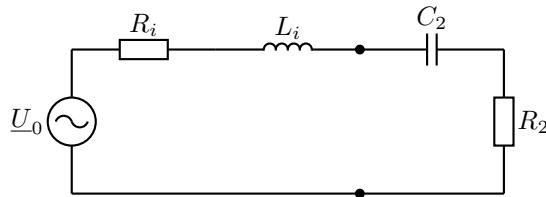


Abbildung 14.1.: Schaltung für die Leistungsberechnung.

14.1.1. Leistungsaufnahme

Leiten Sie einen Ausdruck für die Leistung in Abhängigkeit der gegebenen Größen her. Wählen Sie dabei eine Darstellungsform, so dass die Kapazität $C_2 = C_{opt}$ des Kondensators bestimmt werden kann, damit die vom Widerstand R_2 aufgenommene mittlere Leistung möglichst groß wird.

 Lösung

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (14.1)$$

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}(\underline{U}_{R_2} \cdot \underline{I}^*) \quad (14.2)$$

$$= \operatorname{Re}(R_2 \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^*) = R_2 |\underline{I}|^2 \quad (14.3)$$

$$= \frac{1}{2} R_2 \hat{I}^2 = R_2 I_{eff}^2 \quad (14.4)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{R_i + R_2 + j(\omega L_i - \frac{1}{\omega C_2})} \quad (14.5)$$

$$P = R_2 \frac{|\underline{U}_0|^2}{|R_i + R_2 + j(\omega L_i - \frac{1}{\omega C_2})|^2} \quad (14.6)$$

$$= \frac{1}{2} R_2 \frac{\hat{U}_0^2}{(R_i + R_2)^2 + (\omega L_i - \frac{1}{\omega C_2})^2} \quad (14.7)$$

$$= \frac{R_2 U_{0,eff}^2}{(R_i + R_2)^2 + (\omega L_i - \frac{1}{\omega C_2})^2} \quad (14.8)$$

Daraus folgt, dass die Wirkleistung P im Resonanzfall maximal wird, wenn $(\omega L_i - \frac{1}{\omega C_2}) = 0$ gilt.

14.1.2. Bestimmung der Kapazität

Wie groß ist C_{opt} zu wählen für den Fall $R_2 = 90 \Omega$, $R_i = 10 \Omega$, $L_i = 20 mH$, $U_0 = 141 V$ und $\omega = 2\pi 100 Hz$

 Lösung

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_i C_{opt}}}$$

$$C_{opt} = \frac{1}{\omega_0^2 L_i} = 127 \mu F$$

14.1.3. Maximale Leistung

Welche maximale Leistung nimmt der Widerstand R_2 für den berechneten Fall auf?

Lösung

$$P_{max} = \frac{1}{2} R_2 \frac{\hat{U}_0^2}{(R_i + R_2)^2} = 90 \text{ W}$$

14.2. Parallelresonanzkreis mit Übertrager

An einen Parallelresonanzkreis ist über einen idealen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}=2$ die Parallelschaltung eines Widerstandes R_2 und eines Kondensators C_2 angeschlossen. Die Werte der Bauteile lauten $L_1 = 1 \mu\text{H}$, $C_1 = 100 \text{ pF}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_1$ und $C_2 = C_1$. Wie beeinflusst die Parallelschaltung aus R_2 und C_2 die Resonanzfrequenz und die Güte des Parallelschwingkreises?

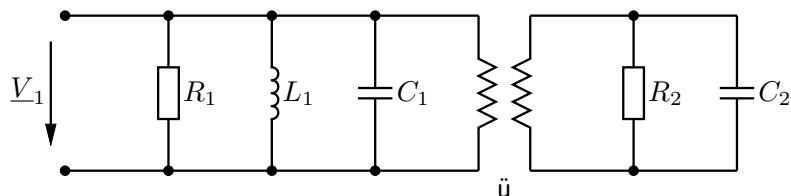


Abbildung 14.2.: Schaltung mit idealem Übertrager.

14.2.1. Ersatzschaltbild

Skizzieren Sie das Ersatzschaltbild der transformierten Parallelschaltung aus R_2 und C_2 .

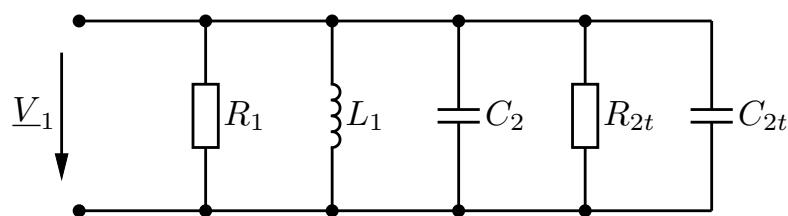
Lösung


Abbildung 14.3.: Impedanztransformation mittlertem idealen Übertrager.

Impedanztransformation mit einem idealen Übertrager:

$$Z_{2t} = \ddot{u}^2 Z_2 \quad (14.9)$$

$$Y_{2t} = \frac{1}{R_{2t}} + j\omega C_{2t} = \frac{1}{\ddot{u}^2} Y_2 \quad (14.10)$$

$$= \frac{1}{\ddot{u}^2} \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2 \right) = \frac{1}{\ddot{u}^2 R_2} + j\omega \frac{C_2}{\ddot{u}^2} \quad (14.11)$$

$$R_{2t} = \ddot{u}^2 R_2 = 4R_2 \quad (14.12)$$

$$C_{2t} = \frac{C_2}{\ddot{u}^2} = \frac{C_2}{4} \quad (14.13)$$

14.2.2. Zusammenfassen

Fassen Sie gleichartige Zweipole zusammen.

Lösung

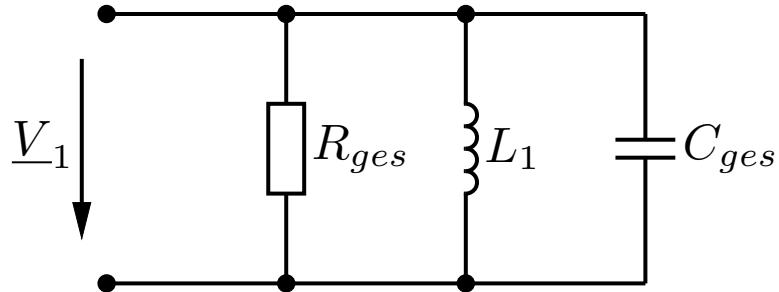


Abbildung 14.4.: Ersatzschaltbild mit zusammengefassten Zweipolen.

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{2t}} = \frac{5}{4R} \quad (14.14)$$

$$R_{ges} = \frac{4}{5}R \quad (14.15)$$

$$C_{ges} = C_1 + C_{2t} = \frac{5}{4}C \quad (14.16)$$

14.2.3. Güte und Resonanz

Bestimmen Sie mit den Bezeichnungen aus der vorherigen Unteraufgabe die Resonanzfrequenz ω_{0t} und die Güte Q_t .

 Lösung

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 100 \text{ MHz} \quad (14.17)$$

$$\omega_{0t} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_{ges}}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \omega_0 = 89.44 \text{ MHz} \quad (14.18)$$

$$Q = \frac{R_p}{\omega_0 L_p} = \frac{1}{G_p} \sqrt{\frac{C_p}{L_p}} = 20 \quad (14.19)$$

$$Q_t = \frac{1}{G_{ges}} \sqrt{\frac{C_{ges}}{L_1}} = R_{ges} \sqrt{\frac{C_{ges}}{L_1}} \quad (14.20)$$

$$= \frac{4}{5} \sqrt{\frac{5}{4}} Q = \sqrt{\frac{4}{5}} Q = 17.89 \quad (14.21)$$

15. Audio-Applikationen

Tipp

Setzen Sie zur Auswertung und graphischen Darstellung der Aufgaben Python und LTspice ein.

15.1. Resonanztransformator

Berechnen Sie den Frequenzgang der komplexen Amplitude $\underline{H}_u(f) = U_1(f)/U_0(f)$ der folgenden Transformator-Schaltung eines dynamischen Mikrofons Abbildung 15.1.

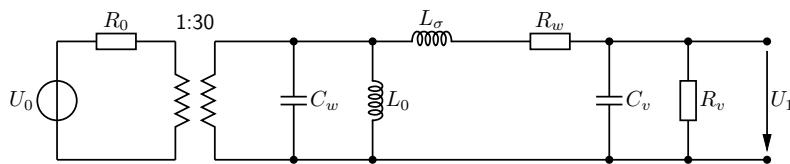


Abbildung 15.1.: Ersatzschaltung eines dynamischen Mikrofons.

$$R_0 = 3 \Omega, \text{ Innenwiderstand des Mikrofons} \quad (15.1)$$

$$L_0 = 25 \text{ H}, \text{ Hauptinduktivität} \quad (15.2)$$

$$L_\sigma = 1 \text{ H}, \text{ Streuinduktivität} \quad (15.3)$$

$$R_w = 100 \Omega, \text{ Wicklungswiderstand} \quad (15.4)$$

$$C_w = 800 \text{ pF}, \text{ Wicklungskapazität} \quad (15.5)$$

$$R_u = 100 \text{ k}\Omega, \text{ Verstärker-Eingangswiderstand} \quad (15.6)$$

$$C_u = 200 \text{ pF}, \text{ Verstärker- und Kabelkapazität} \quad (15.7)$$

$$(15.8)$$

Stellen Sie die Ergebnisse als Funktion der Frequenz grafisch dar:

1. als Ortskurve in der komplexen Ebene,
2. als Betrag $|\underline{H}_u|$ und Phase $\phi_{\underline{H}_u}$ über $\log(f/f_0)$ (normierte Frequenz) und
3. als Bode-Darstellung $20 \cdot \log|\underline{H}_u|$ über $\log(f/f_0)$ (normierte Frequenz).

Bei der Analyse und Erläuterung interessieren Grenzfrequenzen, Eckfrequenzen, Hochpass/Tiefpass-Verhalten, die Resonanz-Güte und die Rolle der einzelnen Komponenten im Hinblick auf die genannten Frequenzen.

 Lösung

Um den idealen Transformator aufzulösen muss man:

1. R_0 auf die Sekundärseite transformieren; erscheint dort als $R_{0s} = R_0/\ddot{u}^2$ mit $\ddot{u}=1/30$.
2. U_0 durch eine sekundärseitige Ersatzspannungsquelle $U_{0s} = U_0/\ddot{u}$ ersetzen.

Neues Netzwerk:

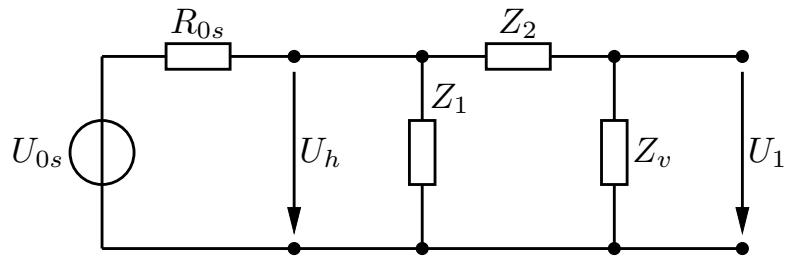


Abbildung 15.2.

$$U_1 = \frac{Z_v}{Z_v + Z_2} U_h \quad U_h = \frac{Z_1 \parallel (Z_2 + Z_v)}{R_{0s} + (Z_1 \parallel (Z_2 + Z_v))} U_{0s} \quad (15.9)$$

$$H = \frac{U_1}{U_0} = \frac{U_1}{\ddot{u} U_{0s}} = \frac{1}{\ddot{u}} \frac{Z_v}{Z_v + Z_2} \frac{Z_p}{R_{0s} + Z_p} \quad (15.10)$$

mit

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = j\omega C_w + \frac{1}{j\omega L_0}; \quad Z_2 = R_w + j\omega L_\sigma \quad (15.11)$$

$$Y_v = \frac{1}{Z_v} = j\omega C_v + \frac{1}{R_v}; \quad Z_p = Z_1 \parallel (Z_2 + Z_v) = \frac{Z_1(Z_2 + Z_v)}{Z_1 + Z_2 + Z_v} \quad (15.12)$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Spezifikation
R0 = 3 # Innenwiderstand des Mikrofons
L0 = 25 # Hauptinduktivitaet
Ls = 1 # Streuinduktivitaet
Rw = 100 # Wicklungswiderstand
Cw = 800e-12 # Wicklungskapazitaet
Rv = 100e3 # Verstaerker-Eingangswiderstand
Cv = 200e-12 # Verstaerker- und Kabelkapazitaet
u = 1/30 # Uebertragungsfaktor u1/u2

# %% Frequenzvektor
f = np.logspace(0, 5, 1000)
w = 2 * np.pi * f
f0 = 1

# %% Impedanzen/Admittanzen
Y1 = 1j*w*Cw + 1/(1j*w*L0)
Z1 = 1/Y1

Yv = 1j*w*Cv + 1/Rv
Zv = 1/Yv

Z2 = Rw + 1j*w*Ls

Zp = Z1*(Z2 + Zv) / (Z1 + Z2 + Zv)

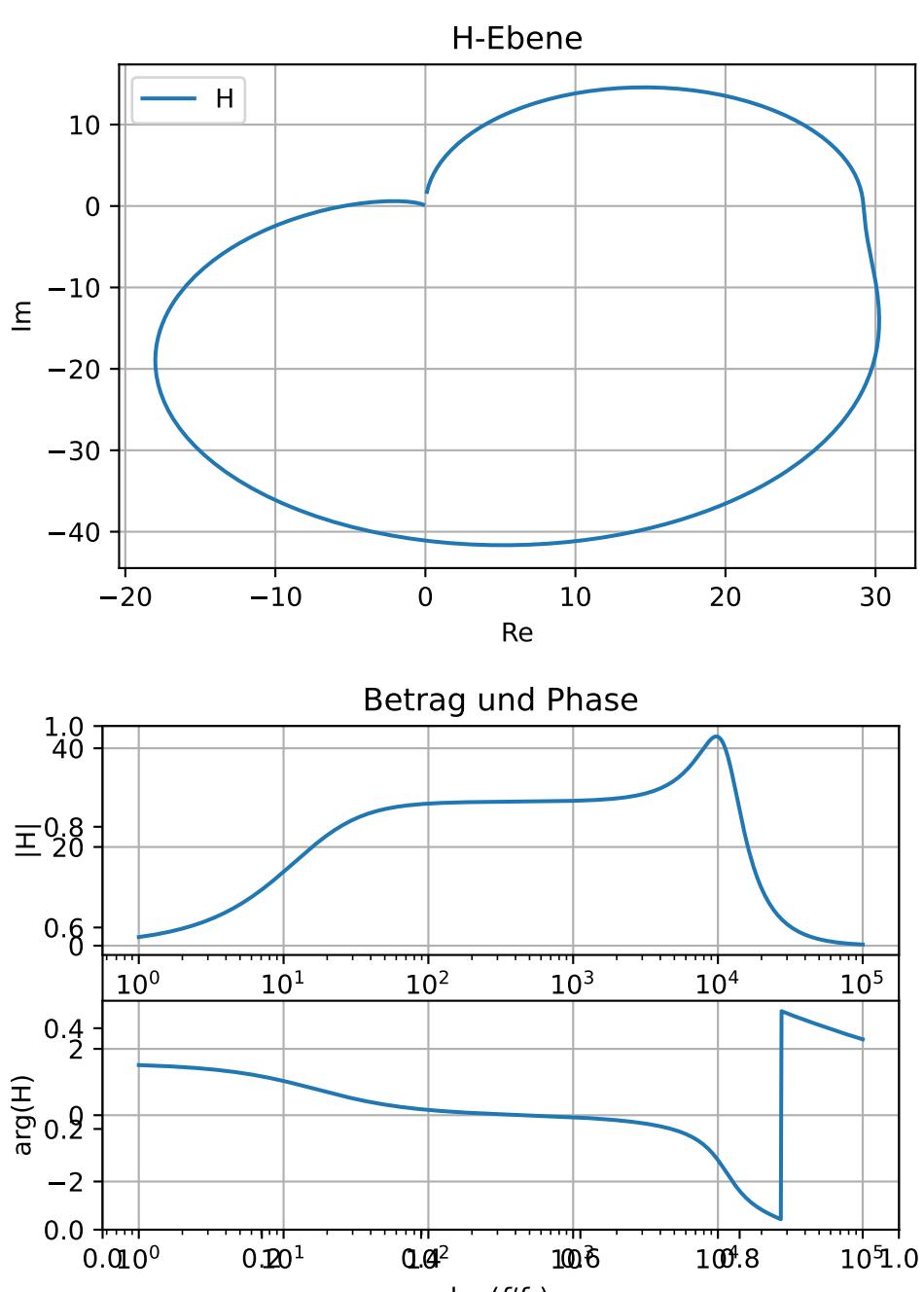
R0q = R0/u**2

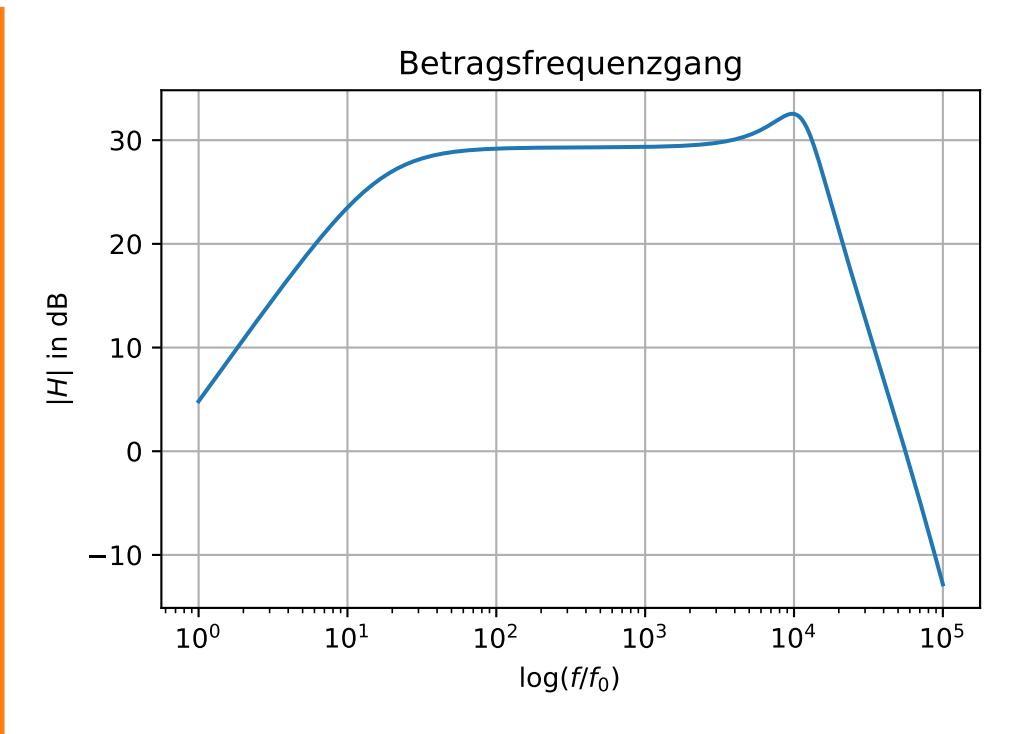
# %% Uebertragungsfunktion
H = 1/u * Zv / (Z2 + Zv) * Zp / (R0q + Zp)

# %% Ortskurve von H(f)
fig1 = plt.figure(1)
plt.title('H-Ebene')
plt.plot(np.real(H), np.imag(H))
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.legend((('H')))
plt.grid()
plt.show()

# %% Betrag und Phase von H(f)
fig2 = plt.figure(2)
plt.title('Betrag und Phase')
plt.subplot(211)
plt.semilogx(f, np.abs(H))
plt.ylabel(r'|H|')
plt.grid()
plt.subplot(212)

```





15.2. Ersatzschaltbild eines Lautsprechers

Die dargestellte Schaltung in Abbildung 15.3 ist ein vereinfachtes Ersatzschaltbild eines elektrodynamischen Lautsprechers. Dabei repräsentiert $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ die Impedanz der ruhenden Schwingspule und Z_M , die Parallelschaltung aus R_2 , L_2 und C_2 , repräsentiert die dynamisch-mechanischen Eigenschaften des Systems.

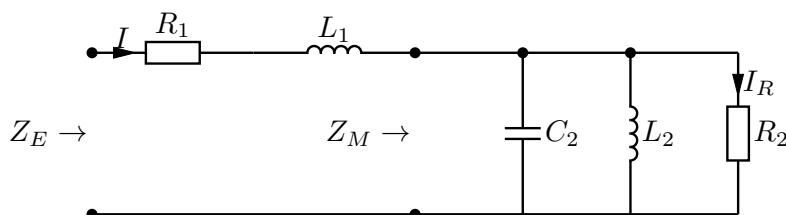


Abbildung 15.3.: Ersatzschaltbild eines Lautsprechers.

$$R_1 = 3 \Omega, L_1 = 200 \mu H, C_2 = 1000 \mu F, L_2 = 4 mH, R_2 = 30 \Omega$$

15.2.1. Eingangsimpedanz

Drücken Sie die Eingangsimpedanz Z_E der Schaltung als Funktion der verwandten Bauteile (R_1, L_1, R_2, L_2, C_2) und der Kreisfrequenz ω aus.

 Lösung

$$Y_M = \frac{1}{Z_M} = j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{R_2} \quad (15.13)$$

$$= \frac{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\frac{\omega L}{R_2}}{j\omega L_2} \quad (15.14)$$

$$Z_E = R_1 + j\omega L_1 + Z_M \quad (15.15)$$

$$= R_1 + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\frac{\omega L}{R_2}} \quad (15.16)$$

15.2.2. Ortskurve

Für niedrige Frequenzen ($0 \leq f \leq 100 \text{ Hz}$) kann der Beitrag ωL_1 der Induktivität L_1 zur Eingangsimpedanz vernachlässigt werden. Konstruieren Sie mit dieser Vereinfachung die Ortskurve der Eingangsimpedanz Z_{E0} als Funktion der Kreisfrequenz ω .

 Lösung

$$Z_{E0} = R_1 + Z_M$$

Konstruktion der Ortskurve $Z_{E0}(\omega)$:

- Y_M zeichnen: Gerade
- Y_M invertieren $\rightarrow Z_M$: Kreis
- R_1 addieren $\rightarrow Z_{E0}$: verschobener Kreis

15.2.3. Wert der Impedanz

Berechnen Sie den Wert der Impedanz Z_{E0} bei der Frequenz $f = 100 \text{ Hz}$.

 Lösung

$$Z_{E0}(f = 100 \text{ Hz}) = (3, 6 - j4, 25) \Omega$$

15.2.4. Ortskurve

Geben Sie näherungsweise die Ortskurve der Impedanz Z_E als Funktion der Kreisfrequenz ω an, inklusive des Beitrags der Induktivität L_1 .

Lösung

Für $f \leq 100 \text{ Hz}$ ist $\omega L_1 \leq 0.125$, daraus folgt für $f \leq 100 \text{ Hz}$ dass $Z_E \approx Z_{E0}$. Für $f \gg 100 \text{ Hz}$ ist $Z_{E0} \approx R_1$ und $Z_E \approx R_1 + j\omega L_1$.

15.2.5. Bode-Diagramm

Der Lautsprecher werde aus einer Sinusspannungsquelle mit $\hat{U}_0 = 10 \text{ V}$ und Innenwiderstand $R_i = 0,5 \Omega$ gespeist. Stellen Sie das Verhältnis der Effektivwerte von I_R und I sowie den Phasenwinkel von I_R zu I als Funktion der Frequenz in einem Bode-Diagramm dar.

Berechnen Sie die abgestrahlte Schallleistung $P_S = RI_{R,eff}^2$ als Funktion der normierten Verstimmung $\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$, wobei $\omega_0 = (L_2 C_2)^{-1/2}$ ist, und stellen Sie $P_S(\nu)$ graphisch dar. Wie groß ist die von der Schaltung aufgenommene Wirkleistung bei $\omega = \omega_0$?

Lösung

$$\frac{I_R}{I} = \frac{Z_M}{R_2} = \frac{j\omega L_2}{R_2(1 - \omega^2 L_2 C_2) + j\omega L_2} \quad (15.17)$$

$$= \frac{1}{1 + R_2 \left(\frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2 \right)} \quad (15.18)$$

$$= \frac{1}{1 + jR_2 \sqrt{\frac{C_2}{L_2}} \left(\omega \sqrt{L_2 C_2} - \frac{1}{\omega \sqrt{L_2 C_2}} \right)} \quad (15.19)$$

$$= \frac{1}{1 + jQ \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}_{\nu}} \quad (15.20)$$

Die Güte $Q = \frac{R_2}{\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}} = 15$.

$$\frac{I_{R,eff}}{I_{eff}} = \frac{|I_R|}{|I|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \nu^2}}$$

Eine vernünftige Darstellung ist doppelt-logarithmisch (Bode-Diagramm).

$$\varphi = \arg \left(\frac{I_R}{I} \right) = -\arctan(Q\nu)$$

Die Schallleistung ergibt sich wie folgt:

$$P_S = R_2 I_{R,eff}^2 = R_2 I_{eff}^2 \frac{I_{R,eff}^2}{I_{eff}^2} \quad (15.21)$$

$$= R_2 \frac{\frac{\hat{U}_0^2}{2}}{|Z_E + R_i|^2} \frac{1}{1 + Q^2 \nu^2} \quad (15.22)$$

15. Audio-Applikationen

Für die exakte Berechnung Z_E aus xxx einsetzen, genähert xxx benutzen. Wenn $\omega = \omega_0$, dann $v = 0$:

$$P_S \approx R_2 \frac{\frac{\hat{U}_0^2}{2}}{(R_1 + R_i + R_2)^2} = 1,3 \text{ W}$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Spezifikation
L1 = 200e-6
R1 = 3
C2 = 1000e-6
L2 = 4e-3
R2 = 30

# %% Frequenzvektor
f = np.logspace(0, 4, 2000)
w = 2 * np.pi * f

# %% Impedanzen/Admittanzen
YM = 1j*w*C2 + 1/(1j*w*L2) + 1/R2
ZM = 1/YM

ZE = R1 + 1j*w*L1 + ZM

ZE0 = R1 + ZM

# %% Ortskurve von ZE0(w)
fig1 = plt.figure(1)
plt.title('Ortskurve')
plt.plot(np.real(ZE0), np.imag(ZE0), label=r'$Z_{E0}$')
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

# %% Uebertragungsfunktion
Q = R2 / (np.sqrt(L2/C2)) # Guete
print(Q)

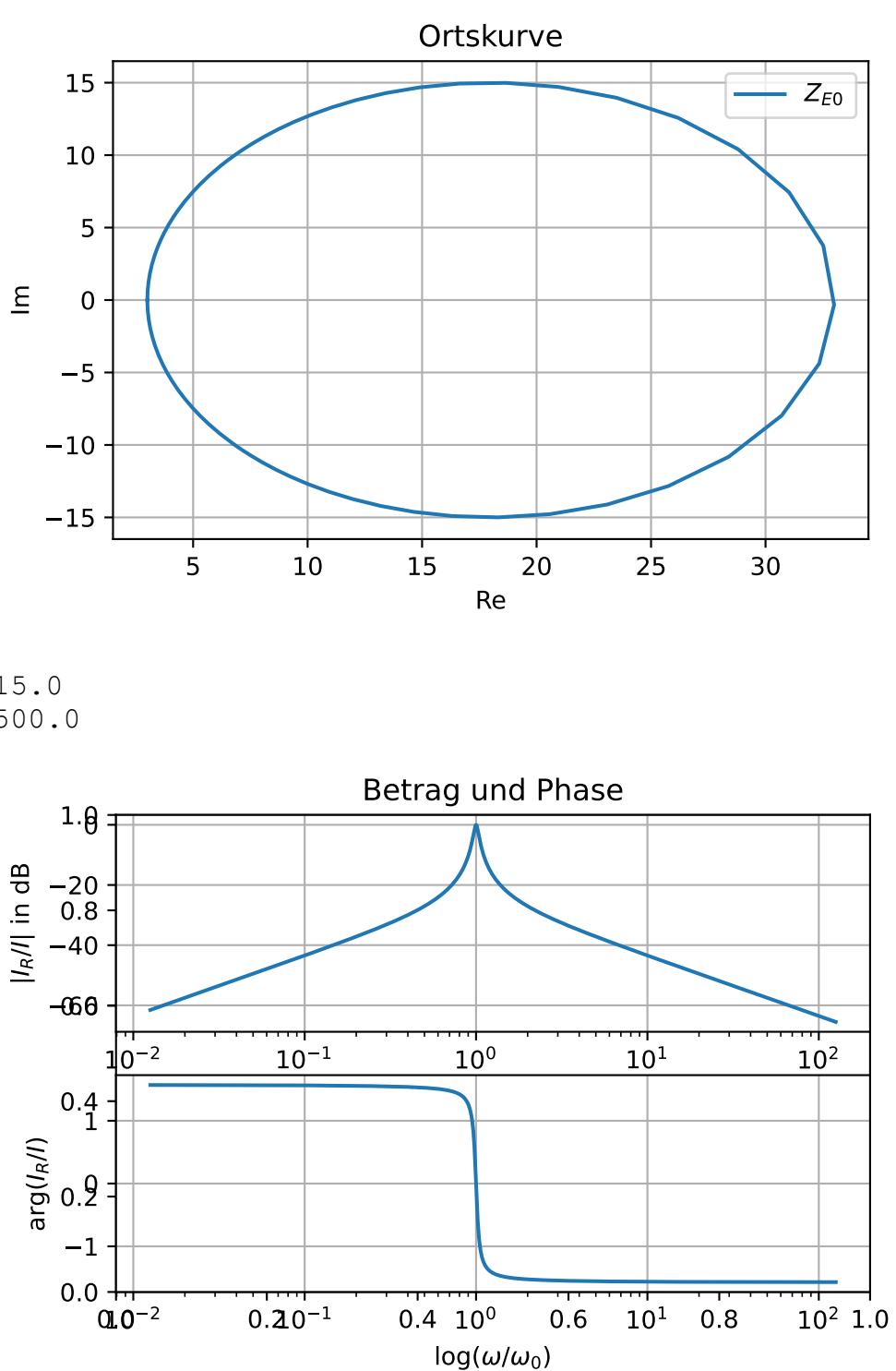
w0 = 1 / np.sqrt(L2*C2)
print(w0)

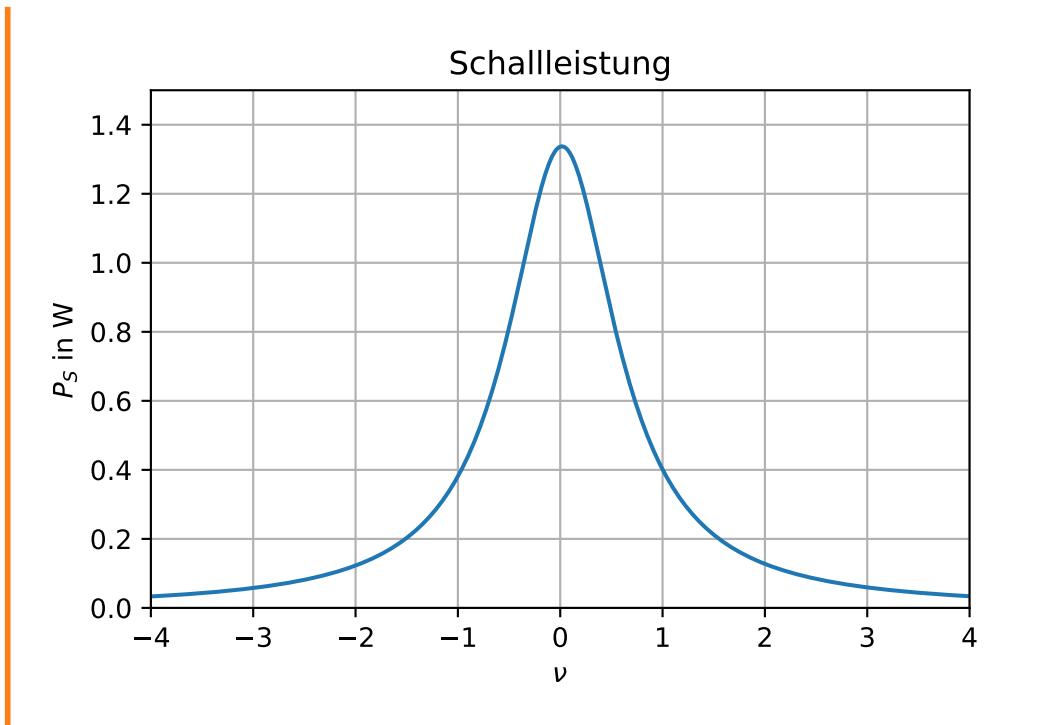
v = (w/w0 - w0/w) # Verstimmung

HI = 1 / (1 + 1j*Q*v)
HI_dB = 20 * np.log10(np.abs(HI))
w_w0 = w/w0

# %% Betrag und Phase von HI(w/w0)
fig2 = plt.figure(2)
plt.title('Betrag und Phase')
plt.subplot(211)
plt.semilogx(w_w0, HI_dB)
plt.ylabel(r'$|H|_R/I|$ in dB' )
plt.grid()

```





Teil III.

Tutorium

16. Einführung

16.1. Organisatorisches

Tutor: **B.Eng. Alicia von Ahlen**

Zu meiner Person: Ich habe Elektrotechnik mit der Vertiefungsrichtung Informationstechnik studiert und bin zur Zeit im 1. Semester des Masterprogramms MScEE an der HSB. Ich habe bereits die Tutorien *Grundlagen der Elektrotechnik 1 und 2* durchgeführt.

Das Tutorium ist als Unterstützung zur Vorlesung gedacht und legt den Fokus auf eine Wiederholung der Unterrichtsinhalte und Übungsaufgaben. Es besteht auch die Möglichkeit Fragen zu den Vorlesungsinhalten zu stellen.

16.2. Termine

Das GEL2-tut findet montags im ersten Block (08:00 - 09:30 Uhr) statt.

Eine Zeit- und Themenplanung ist in der folgenden Tabelle zu sehen.

Datum	Thema
28.04.25	Einführung & Periodische Signale
05.05.25	Komplexe Größen der Sinusstromtechnik
12.05.25	Verhalten der Grundzweipole 1
19.05.25	Verhalten der Grundzweipole 2
26.05.25	KWR
02.06.25	Filterschaltungen, Bodediagramm und Ortskurven
09.06.25	Pfingstmontag
16.06.25	Schwingkreise
23.06.25	Transformatoren
30.06.25	Klausurvorbereitung I
07.07.25	Klausurvorbereitung II

17. Komplexe Zahlen

- imaginäre Einheit
- Aufbau komplexer Zahlen
- Addition
- Subtraktion
- Betrag einer komplexen Zahl
- Polarkoordinaten
- Multiplikation
- Division
- Kehrwert
- Konjugiert-Komplex

17.1. Die imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit j ist definiert als:

$$j^2 = -1$$

Für höhere Potenzen von j erhält man:

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = -j$$

$$j^4 = 1$$

$$j^5 = j$$

$$j^6 = -1$$

usw.

17.2. Aufbau komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil. Sie werden durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Ist der Buchstabe nicht unterstrichen, wird von dem Betrag der Komplexen Zahl geredet.

$$\underline{A} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}\}$$

In der Elektrotechnik wird zur Kennzeichnung des Imaginärteils oft der Buchstabe j anstelle des i verwendet, da das i für die Bezeichnung des Stromes vorhergesehen ist.

17.3. Rechenoperationen

17.3.1. Addition von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen \underline{A} und \underline{B} werden addiert, indem ihre Real- und Imaginärteile getrennt voneinander addiert werden.

$$\underline{A} + \underline{B} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + \operatorname{Re}\{\underline{B}\} + j(\operatorname{Im}\{\underline{A}\} + \operatorname{Im}\{\underline{B}\})$$

17.3.2. Subtraktion von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen \underline{A} und \underline{B} werden subtrahiert, indem ihre Real- und Imaginärteile getrennt voneinander abgezogen werden.

$$\underline{A} - \underline{B} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} - \operatorname{Re}\{\underline{B}\} + j(\operatorname{Im}\{\underline{A}\} - \operatorname{Im}\{\underline{B}\})$$

17.3.3. Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag einer komplexen Zahl \underline{A} ist die Euklidische Länge des Vektors, wenn dieser zum Beispiel in einem Koordinatensystem gezeichnet ist. Der Betrag wird als $|\underline{A}|$ oder vereinfacht als A geschrieben.

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{\operatorname{Re}\{\underline{A}\}^2 + \operatorname{Im}\{\underline{A}\}^2}$$

17.3.4. Phasenwinkel einer komplexen Zahl

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{\underline{A}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{A}\}}\right)$$

Der Phasenwinkel wird üblicherweise von 0° bis 180° positiv (Zählweise CCW) und von 180° bis 360° negativ (Zählweise CW) angegeben.

17.3.5. Eulersche Identität und Polarkoordinaten

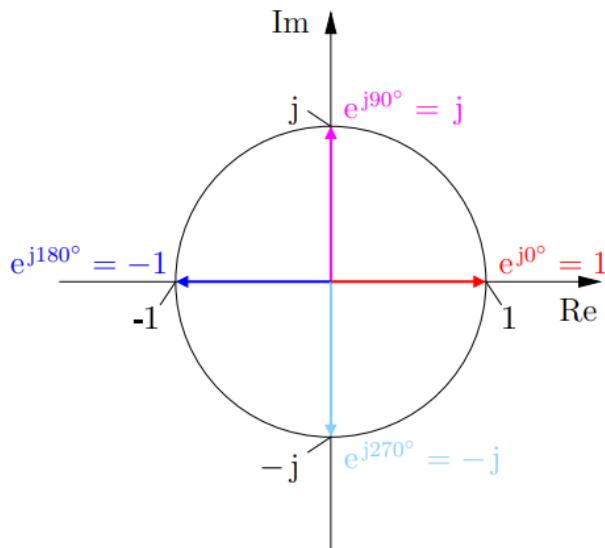
Komplexe Zahlen können auch als Polarkoordinaten über die Eulersche Identität beschrieben werden. Dabei setzt sich das aus Betrag und Phasenwinkel zusammen.

$$\underline{A} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}\} = A \cdot e^{j\varphi}$$

Eulersche Identität

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

Eulersche Identität: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$



Die komplexe Zahl $e^{j\varphi}$ hat immer den Betrag 1 und den Phasenwinkel φ .

Abbildung 17.1.: zeigerbild_euler

Die komplexe Zahl $e^{j\varphi}$ hat immer den Betrag 1 und den Phasenwinkel φ .

17.3.6. Multiplikation komplexer Zahlen

Die Multiplikation ist über die Polarkoordinaten einfacher. Bei der Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Phasenwinkel addiert.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot B \cdot e^{j(\varphi_A + \varphi_B)}$$

17. Komplexe Zahlen

17.3.7. Division komplexer Zahlen

Ähnlich zur Multiplikation wird bei der Division die Beträge dividiert und die Phasenwinkel subtrahiert.

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A}{B} \cdot e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}$$

17.3.8. Kehrwert einer komplexen Zahl

Beim Kehrwert einer komplexen Zahl wird der Kehrwert des Betrages genommen und das Vorzeichen des Phasenwinkels invertiert.

$$\frac{1}{\underline{A}} = \frac{1}{A} \cdot e^{-j\varphi}$$

17.3.9. Konjugiert-Komplex

Bei dem konjugiert-komplexen einer Zahl wird das Vorzeichen des Imaginärteils invertiert. Dadurch verändert sich der Betrag nicht, der Phasenwinkel wird allerdings auch invertiert.

$$\underline{A} = Re\{\underline{A}\} + j \cdot Im\{\underline{A}\}$$

$$\underline{A}^* = Re\{\underline{A}\} - j \cdot Im\{\underline{A}\}$$

17.4. Übungen

17.4.1. Aufgabe 2.1

$$\sqrt{-9} + \sqrt{-x^2} - \sqrt{-y^2} + \sqrt{-25}$$

Lösung 2.1

$$3\sqrt{-1} + x\sqrt{-1} - y\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1} = j3 + jx - jy + j5 = j(8 + x - y)$$

17.4.2. Aufgabe 2.2

a) $\frac{3j^3 \cdot 5j^4}{6j^{20}}$

b) $\frac{1}{j^5} + \frac{1}{j^7}$

 Lösung 2.2

a)

$$\frac{-j3 \cdot 5}{6i^4} = \frac{-j15}{6} = -j2,5$$

b)

$$\frac{1}{j} + \frac{1}{-j} = -j + j = 0$$

17.4.3. Aufgabe 2.3

a) $(1 + 2j) - (-2 + 3j) + (-3 + j) - (5 + 4j) - (-1 + 9j) + (5 - 8j)$

b) $(-2a + 3j) - (u - uj) + (-2a - 3j) - (-u - vj)$

 Lösung 2.3

a) $1 - j21$

b) $-4a + j(u + v)$

17.4.4. Aufgabe 2.4

a) $(5 - 2j)(-3 + j)$ (Ergebnis in kartesischer Form)

b) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}j)(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}j)$ (Ergebnis in kartesischer Form)

 Lösung 2.4

a) $-13 + j11$

b) 93

17.4.5. Aufgabe 2.5

a) $\frac{3+4j}{2+j}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}-j}$

c) $\frac{3j}{1-j}$

17. Komplexe Zahlen

Lösung 2.5

$$a) \frac{(3+4j)(2-j)}{(2+j)(2-j)} = \frac{6+8j-3j+4}{4+1} = 2 + j$$

$$b) \frac{1(\sqrt{5}+j)}{(\sqrt{5}-j)(\sqrt{5}+j)} = \frac{\sqrt{5}+j}{5+1} = \frac{\sqrt{5}}{6} + j \frac{1}{6}$$

$$c) \frac{3j(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{-3+3j}{1+1} = -\frac{3}{2} + j \frac{3}{2}$$

17.4.6. Aufgabe 2.6

$$a) \frac{1+j}{1-j} + \frac{1-j}{1+j}$$

$$b) \frac{1-j}{1+j} - \frac{1+j}{1-j}$$

Lösung 2.6

$$a) \frac{1+j}{1-j} + \frac{1-j}{1+j} = \frac{(1+j)^2 + (1-j)^2}{(1-j)(1+j)} = \frac{1+2j-1+1-2j-1}{1+1} = 0$$

$$b) \frac{(1-j)^2 - (1+j)^2}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-2j-1-(1+2j-1)}{1+1} = \frac{-4j}{2} = -2j$$

17.4.7. Aufgabe 2.7

In die Exponentialform umwandeln:

$$a) 0,5 - \sqrt{6}j$$

$$b) \sqrt{3} + \sqrt{3}j$$

$$c) 3 - 2j$$

Lösung 2.7

$$a) 2,5 \cdot e^{j \cdot 4,914}$$

$$b) 2,45 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$$

$$c) 3,61 \cdot e^{j \cdot 5,695}$$

17.4.8. Aufgabe 2.8

In die arithmetische Form umwandeln:

$$a) 83e^{j \cdot 1,1083}$$

- b) $3,8e^{-j \cdot 5,524}$
 c) $e^{0,2+1,2j}$

Lösung 2.8

- a) $83(\cos(1,1083) + j\sin(1,1083)) = 37,03 + j74,28$
 b) $3,8(\cos(-5,524) + j\sin(-5,524)) = 2,757 + j2,616$
 c) $e^{0,2}(\cos(1,2) + j\sin(1,2)) = 0,443 + j1,138$

17.4.9. Aufgabe 2.9

Für $z_1 = 1,5 - 0,5j$ und $z_2 = 3 + 0,5j$ die Exponentialform berechnen und die folgende Gleichung in der arithmetischen Form angeben:

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$$

Lösung 2.9

$$z_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot e^{-j \cdot 0,322}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{37}}{2} \cdot e^{j \cdot 0,165}$$

$$z_1 + z_2 = 4,5$$

$$\frac{\frac{\sqrt{370}}{4} \cdot e^{j(-0,322+0,165)}}{4,5} = 1,069 \cdot e^{-j0,157} = 1,056 - j0,167$$

17.4.10. Aufgabe 2.10

Bringe den folgenden Term in die Darstellung $\underline{A} = Re\{\underline{A}\} + j \cdot Im\{\underline{A}\}$:

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

Lösung 2.10

$$\frac{1}{j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

17.4.11. Aufgabe 2.11

Bringe den folgenden Term in die Darstellung $\underline{A} = Re\{\underline{A}\} + j \cdot Im\{\underline{A}\}$:

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

 Lösung 2.11

$$\frac{1}{-\omega^2LC + j\omega RC + 1} = \frac{1 - \omega^2LC - j\omega RC}{(1 - \omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{1 - \omega^2LC}{(1 - \omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{(1 - \omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2}$$

18. Periodische Signale

- Stromarten
- Kennwerte von Wechselgrößen

18.1. Stromarten

Neben dem Gleichstrom, der ausführlich in GEL1 behandelt wurde, gibt es weitere Stromarten.

Der Wechselstrom kennzeichnet sich durch sein beliebig periodisches Verhalten. Die Richtung und Größe variiert dabei mit der Zeit t . Eine Sonderform, die große Bedeutung hat ist der Sinusstrom.

Weiterhin gibt es den Mischstrom, der aus einer Überlagerung von Gleichstrom und Wechselstrom entsteht und zum Beispiel durch das Gleichrichten verursacht wird.

Des Weiteren gibt es noch die sogenannten modulierten Ströme. Dort schwanken entweder die Amplitude A , die Frequenz f oder der Nullphasenwinkel φ mit der Zeit t . Solche Signale werden hier nicht weiter behandelt. Diese kommen in dem Modul *Grundlagen der Informationstechnik* vor, welches im 4. Semester in der Vertiefungsrichtung Informationstechnik liegt.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
plt.axhline(y = 0.75)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Gleichstrom')
plt.grid()
plt.show()
```

18. Periodische Signale

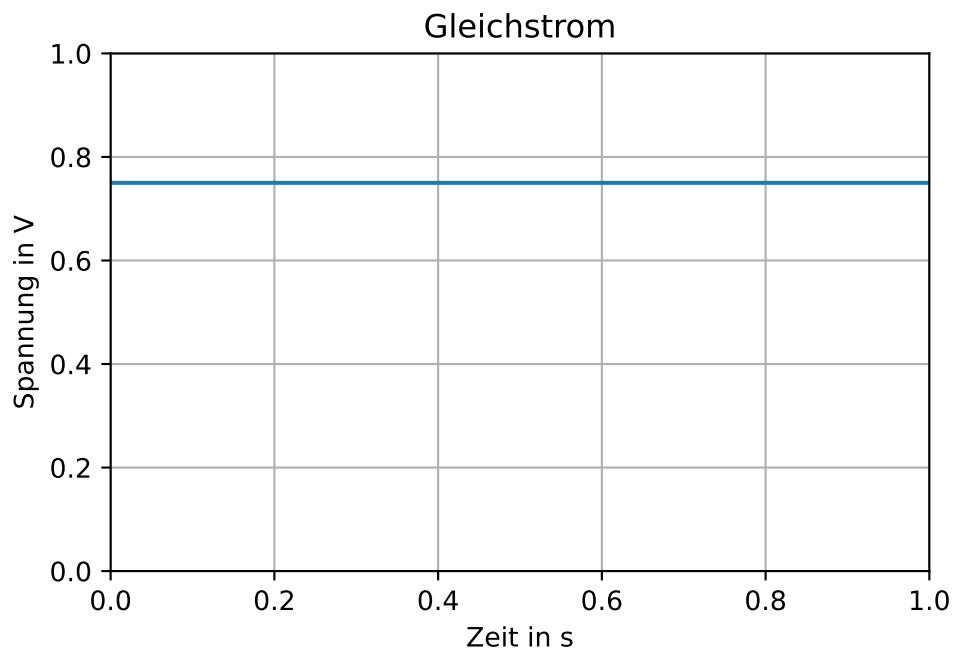


Abbildung 18.1.: Gleichstrom

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 5
sinus1 = np.sin(2 * np.pi * f * time)
sinus2 = np.sin(2 * np.pi * 0.5*f * time)

plt.figure()
plt.plot(time,sinus1+sinus2)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Wechselstrom')
plt.grid()
plt.show()
```

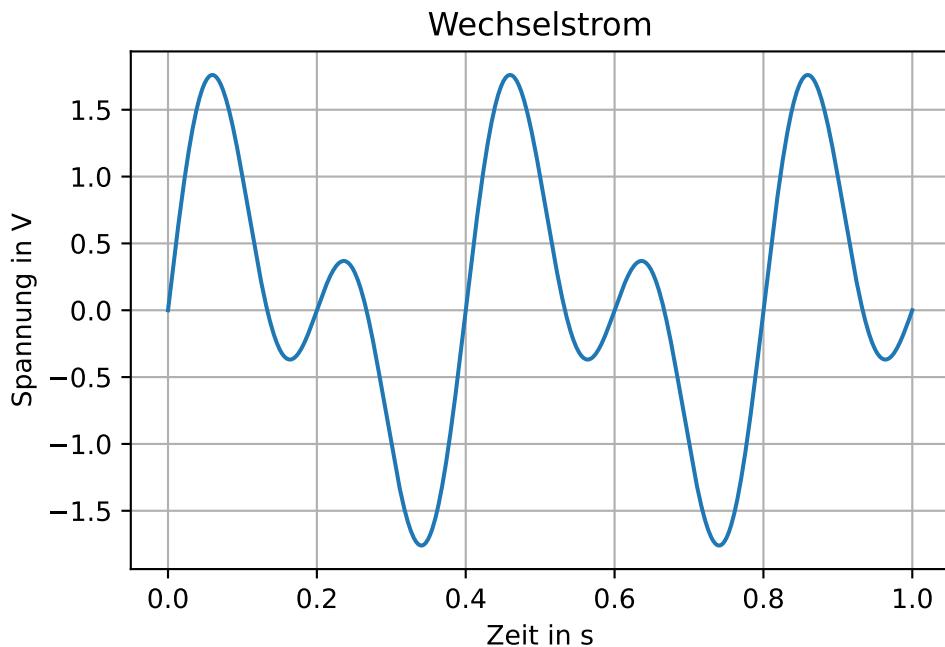


Abbildung 18.2.: Wechselstrom

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 5
sinus = np.sin(2 * np.pi * f * time)

plt.figure()
plt.plot(time,sinus)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Sinusstrom')
plt.grid()
plt.show()

```

18. Periodische Signale

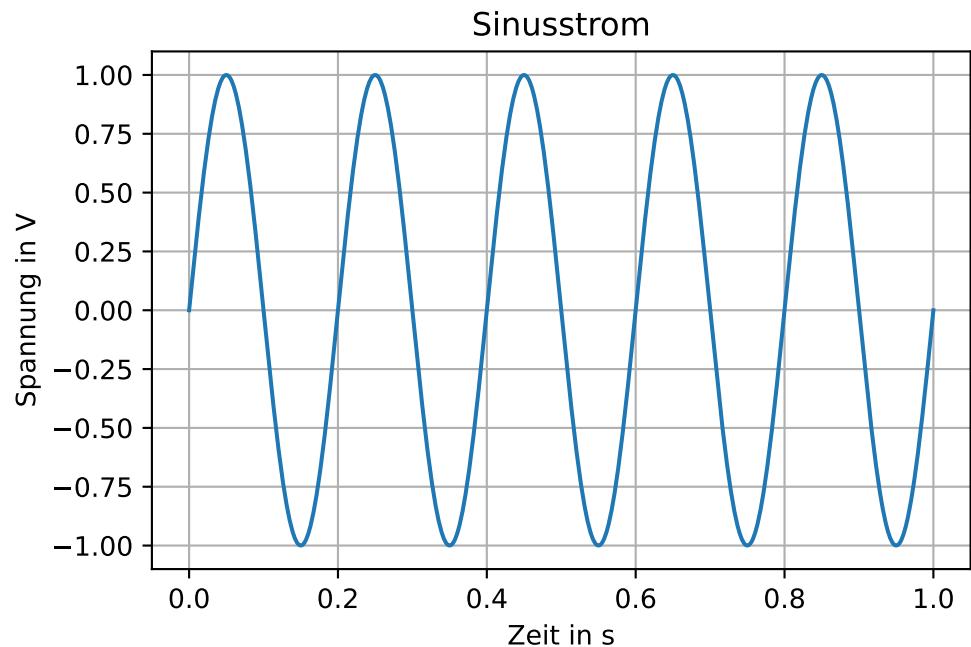


Abbildung 18.3.: Sinusstrom

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 5
sinus = np.sin(2 * np.pi * f * time)

plt.figure()
plt.plot(time,sinus+0.5)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Mischstrom')
plt.grid()
plt.show()
```

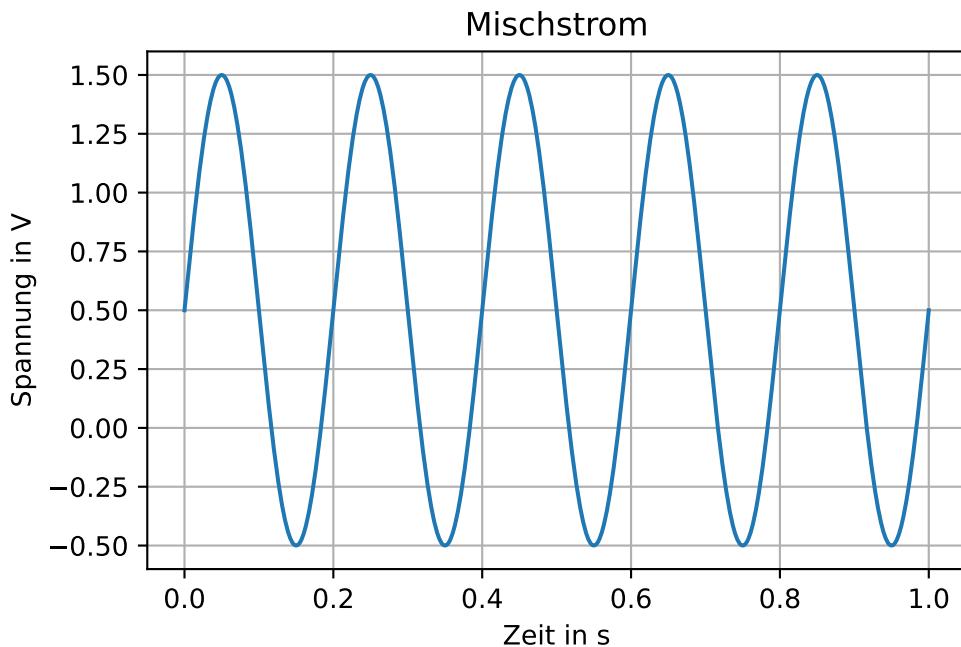


Abbildung 18.4.: Mischstrom

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 20
sinus1 = np.sin(2 * np.pi * f * time)
sinus2 = 0.2 * np.sin(2 * np.pi * 0.1*f * time)
modulated = (1 + 0.5 * np.sin(2 * np.pi * 0.1*f * time)) * np.sin(2 * n

```

```

plt.figure()
plt.plot(time,modulated)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('amplituden-moduliertes Signal')
plt.grid()
plt.show()

```

18. Periodische Signale

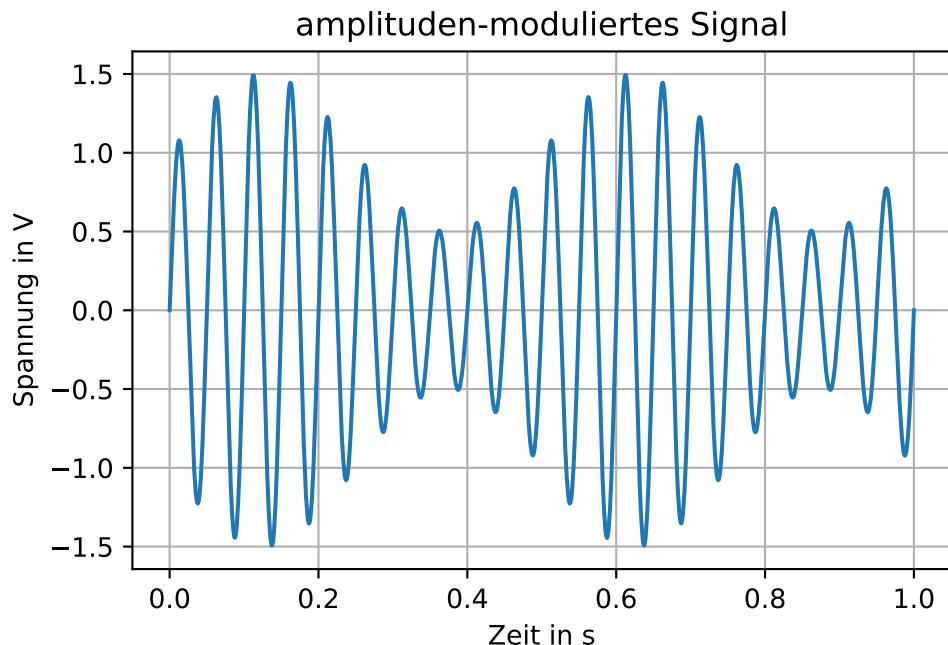


Abbildung 18.5.: Amplituden-moduliertes Signal

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fs = 2000
fc = 100
fm = 15
beta = 3
t = np.arange(0, 0.2, 1/fs)

frm = np.cos(2*np.pi*fc*t + beta*np.sin(2*np.pi*fm*t))
m = np.cos(2*np.pi*fm*t)

plt.figure()
plt.plot(t, frm)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('frequenz-moduliertes Signal')
plt.grid()
plt.show()
```

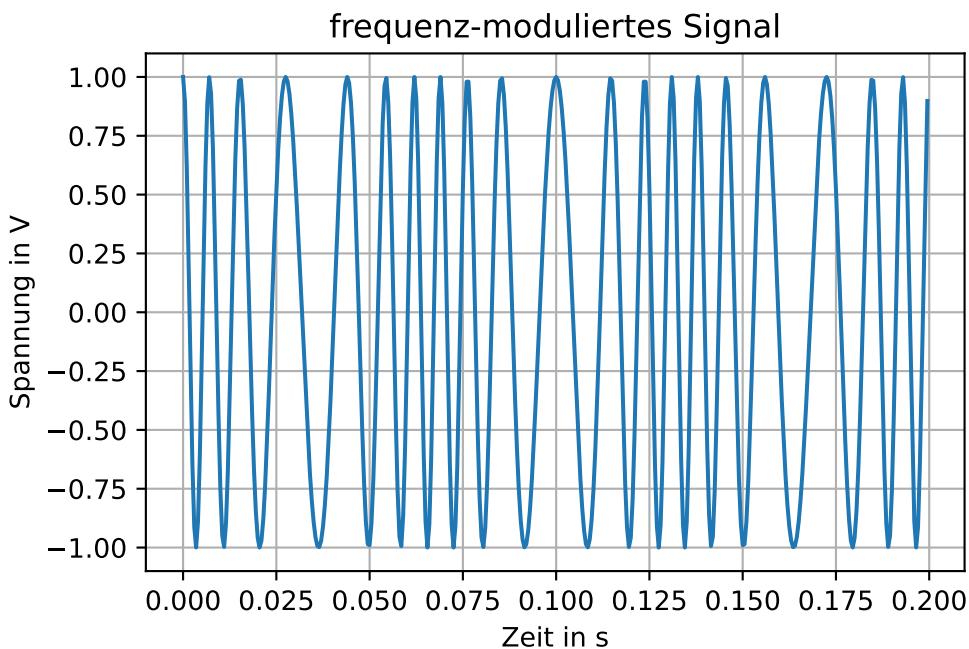


Abbildung 18.6.: Frequenz-moduliertes Signal

18.2. Kennwerte von Wechselgrößen

Allgemein kann man eine sich zeitlich ändernde sinusförmige Wechselgröße mit der folgenden Funktion beschreiben.

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

Dabei wird der Zeitwert x als auch der Scheitelwert \hat{x} mit einem kleinen Formelbuchstaben bezeichnet.

18.2.1. Periodendauer und Frequenz

Da sich eine sinusförmige Wechselgröße wiederholt sich nach Ablauf des Winkels $2\pi = 360^\circ = \omega T$. Damit kann man die Periodendauer T über die Kreisfrequenz ω darstellen.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Die Frequenz f gibt die Anzahl der Perioden pro Sekunde an und wird in $\text{Hz} = 1/\text{s}$ gemessen. Die Frequenz ist der Kehrwert der Periodendauer.

$$f = \frac{1}{T}$$

18. Periodische Signale

Die Kreisfrequenz ist die Frequenz mit dem Faktor 2π erweitert. Sie wird in 1/s und **nicht** in Hz gemessen!

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

18.2.2. Phasenlage

Sinusgrößen können zu verschiedenen Zeitpunkten ihre Scheitelwerte und Nulldurchgänge erreichen. Man sagt, dass diese Größen unterschiedliche Phasenlagen haben; sie sind gegeneinander phasenverschoben.

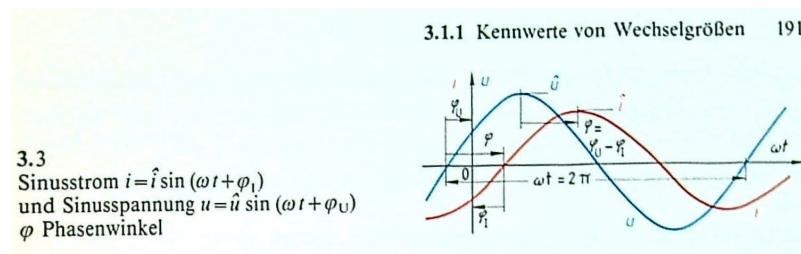


Abbildung 18.7.: Phasenlage

Entn. aus [22]

Nullphasenwinkel

Allgemein gesprochen beginnt eine Sinusfunktion bei $t=0$ und geht um den Nullphasenwinkel φ_x früher als die normale Sinusfunktion $\sin(\omega t)$ durch Null. Das Vorzeichen des Winkel ist sehr wichtig!

Beim positiven Nulldurchgang der Sinusgröße wird ein Pfeil zum Nullpunkt gezeichnet. Ist der Pfeil in Zählrichtung der Zeitachse ist der Nullphasenwinkel positiv, ist der Pfeil entgegen der Zählrichtung der Zeitachse, dann ist er negativ (siehe Bild unter Phasenlage).

Phasenwinkel

Zusätzlich zum Nullphasenwinkel gibt es den Phasenwinkel. Dieser gibt die Phasenverschiebung zwischen zwei Sinussignalen an. Es ist festgelegt, dass der Strom in solchen Fällen als Bezugssgröße genommen wird.

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I$$

Beispiel:

$$\varphi_I = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$$

$$\varphi_U = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = \left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 30^\circ - (-60^\circ) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Die Spannung eilt dem Strom um $\varphi = 90^\circ$ vor.

18.2.3. Mittelwert

Der Mittelwert ist der zeitlich durchschnittliche Wert einer Funktion.

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

Bei reinem Wechselstrom ist der Mittelwert 0.

18.2.4. Gleichrichtwert

Der Gleichrichtwert ist der Mittelwert einer gleichgerichteten Größe.

$$\overline{|x(t)|} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$$

Verhältnis von Gleichricht- zu Scheitelwert (bei Sinusgrößen): $\frac{\overline{|i|}}{\hat{i}} = 0.6366$

18.2.5. Effektivwert

Der Effektivwert einer periodischen Spannung (oder eines periodischen Stroms) entspricht dem Wert einer Gleichspannung (eines Gleichstroms), der in einer ohmschen Last dieselbe Leistung umsetzt.

$$X = X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

Scheitelfaktor

Der Scheitelfaktor ist das Verhältnis von Scheitelwert \hat{i} bzw. \hat{u} zum Effektivwert I bzw. U.

$$\xi = \frac{\hat{x}}{X_{eff}}$$

Der Scheitelfaktor für Sinusgrößen beträgt $\xi = \sqrt{2} = 1.414$.

18. Periodische Signale

Der Scheitelfaktor für Dreieckspannung beträgt $\xi = \sqrt{3}$.

Der Scheitelfaktor für Rechtecksignale beträgt $\xi = 1$.

Formfaktor

Der Formfaktor stellt das Verhältnis von Effektivwert I bzw. U zu Gleichrichtwert $\overline{|i|}$ bzw. $\overline{|u|}$ dar.

$$F = \frac{X_{eff}}{|x|}$$

Der Formfaktor für Sinusgrößen beträgt $F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$.

Der Formfaktor für Dreiecksignale beträgt $F = \frac{1.11}{2}$.

Der Formfaktor für Rechtecksignale beträgt $F = 1.11$.

18.2.6. Effektivwert mit Gleichstromanteil

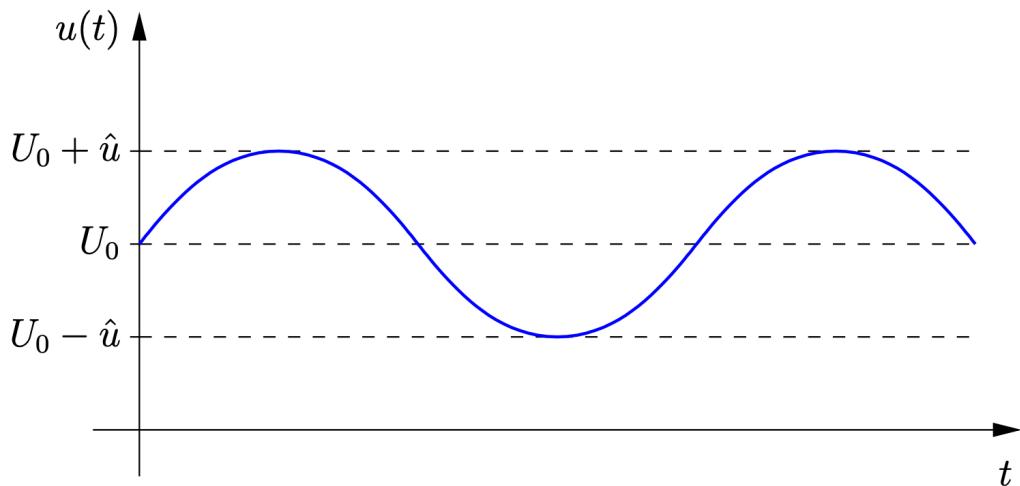


Abbildung 18.8.: Mischspannung

Entn. aus [23]

$$X_{eff} = \sqrt{X_o^2 + X_{eff\sim}^2}$$

18.3. Übungen

18.3.1. Aufgabe Gleichrichtwert

Ein Sinusstrom mit dem Scheitelwert $\hat{i} = 10A$ fließt durch die Gleichrichterschaltung-Brückenschaltung von Bild 3.4.

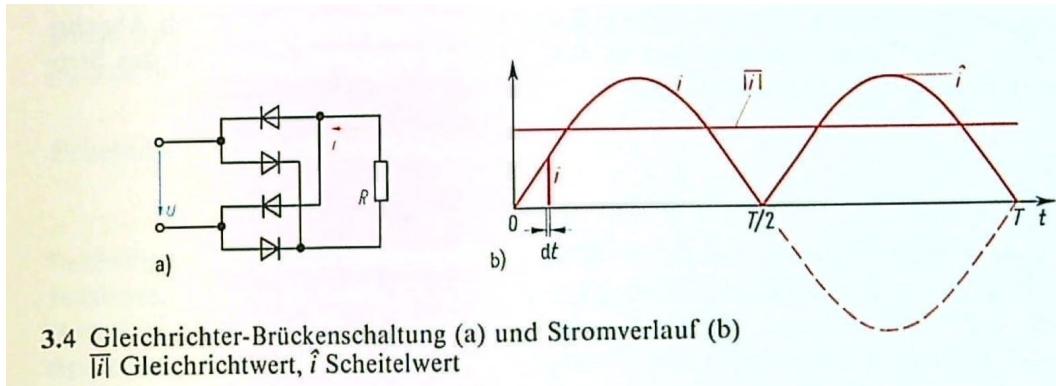


Abbildung 18.9.: Aufgabe 3.1

Entn. aus [22]

Welche Elektrizitätsmenge Q wird während der Zeit $t = 2 h$ befördert?

Tipp: $Q = i \cdot t$

Lösung

$$\bar{i} = 0.6366 \hat{i} = 0.6366 \cdot 10A = 6.366A$$

$$Q = \bar{i}t = 6.366A \cdot 2h = 12.73Ah$$

18.3.2. Aufgabe Zeitfunktion berechnen

Die übliche Netzspannung 1982 betrug $U = 220V$ bei der Netzfrequenz $f = 50Hz$. Es sind der Gleichrichtwert \bar{u} und die Zeitfunktion u dieser Spannung zu bestimmen.

Lösung

Netzspannung ist Sinusförmig \rightarrow Formfaktor $F = 1.111$

Gleichrichtwert:

$$\bar{u} = \frac{U}{F} = \frac{220V}{1.111} = 198V$$

Zeitfunktion:

Scheitelwert:

$$\hat{u} = \sqrt{2}U = \sqrt{2} \cdot 220V = 311.1V$$

Kreisfrequenz:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50Hz = 314.2 \frac{1}{s}$$

$$u = \hat{u} \sin(\omega t) = 311.1V \cdot \sin(314.2 \frac{1}{s} t)$$

18.3.3. Aufgabe Mittelwerte aus Zeitverlauf bestimmen

4. In den Abbildungen a bis d sind periodische, zeitabhängige Spannungen mit dem Spitzenwert $\hat{u} = 10V$ und der Periodendauer T gegeben. Berechnen Sie jeweils den Mittelwert, den Gleichrichtwert sowie den Effektivwert für die Spannungsverläufe.

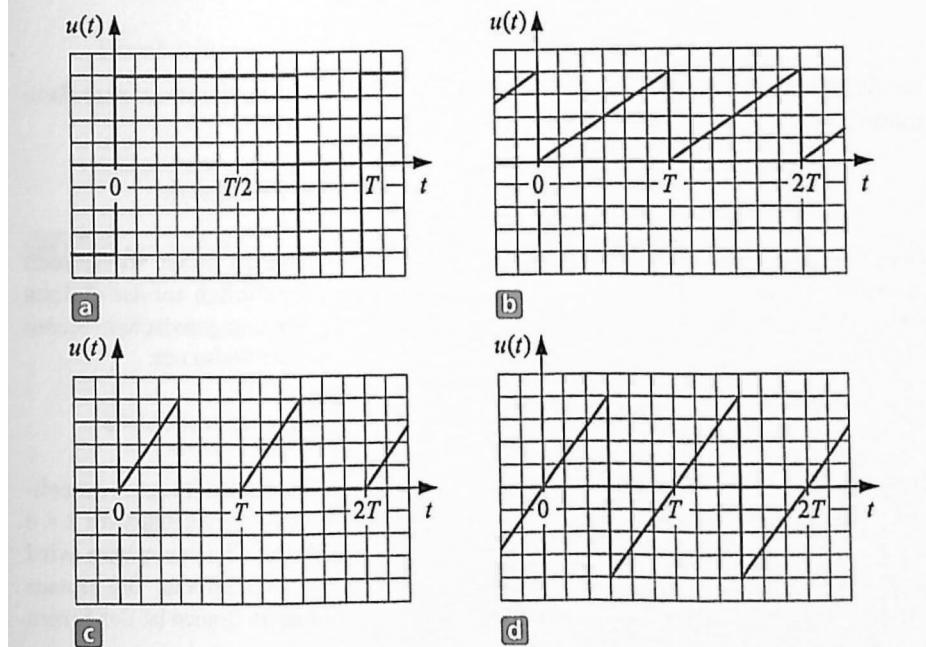


Abbildung 18.10.: Aufgabe 3.3

Entn. aus [24]

Lösung 3.3

a) Mittelwert:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left[\hat{u} \frac{3T}{4} - \hat{u} \frac{T}{4} \right] = \frac{\hat{u}}{2} = 5V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{1}{T} \left[\hat{u} \frac{3T}{4} + |-\hat{u}| \frac{T}{4} \right] = \hat{u} = 10V$$

Effektivwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[\hat{u}^2 \frac{3T}{4} + (-\hat{u}^2) \frac{T}{4} \right]} = \hat{u} = 10V$$

b) Mittelwert:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \frac{t}{T} dt = \frac{\hat{u}}{T^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{\hat{u}}{2} = 5V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = |u| = 5V$$

Effektivwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(\hat{u} \frac{t}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T^3} \frac{t^3}{3} \Big|_0^T} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{3}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = 5.77V$$

c) Mittelwert:

$$\bar{u} = \frac{\hat{u}}{4} = 2.5V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \bar{u} = 2.5V$$

Effektivwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(2\hat{u} \frac{t}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{4\hat{u}^2}{T^3} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{T/2}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{6}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{6}} = 4.08V$$

d) Mittelwert:

$$\bar{u} = 0V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \left[\hat{u} \frac{T}{4} + \hat{u} \frac{T}{4} \right] = \frac{\hat{u}}{2} = 5V$$

Effektivwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(2\hat{u} \frac{t}{T} \right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T \left(2\hat{u} \frac{t-T}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{6} + \frac{\hat{u}^2}{6}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = 5.77V$$

18.3.4. Aufgabe 3.4

Ein Wechselstrom besteht nach der Abbildung aus “angeschnittenen” Sinushalbschwingungen. In den Bereichen $0 < \omega t < \alpha$ und $\pi < \omega t < (\pi + \alpha)$ fließt kein Strom ($i = 0$), wobei $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$ sei. In der übrigen Zeit (innerhalb des Bereiches $0 < \omega t < 2\pi$) wird der Stromverlauf durch die Gleichung $i = \hat{i} \sin(\omega t)$ wiedergegeben. Hierbei betrage der Scheitelwert des Stromes $\hat{i} = 10A$.

Wie groß ist der Effektivwert I_{eff} des Stromes?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

omega_t = np.arange(0, 2*np.pi, np.pi/(2**6))
i = 10 * np.sin(omega_t)

alpha = np.pi/4

for a in range(len(i)):
    if omega_t[a] < alpha or (omega_t[a] > np.pi and omega_t[a] < np.pi + alpha):
        i[a] = 0

list_ticks = [None]*128
list_ticks[0] = '0'
list_ticks[63] = '$\pi$'
list_ticks[127] = '$2\pi$'

plt.figure()
plt.plot(omega_t, i)
plt.xlabel('$\omega t$')
plt.ylabel('i')
# plt.xticks([0, 63, 127], ['0', '$\pi$', '2$\pi$'])
plt.xticks(omega_t, list_ticks)
plt.grid(True)
```

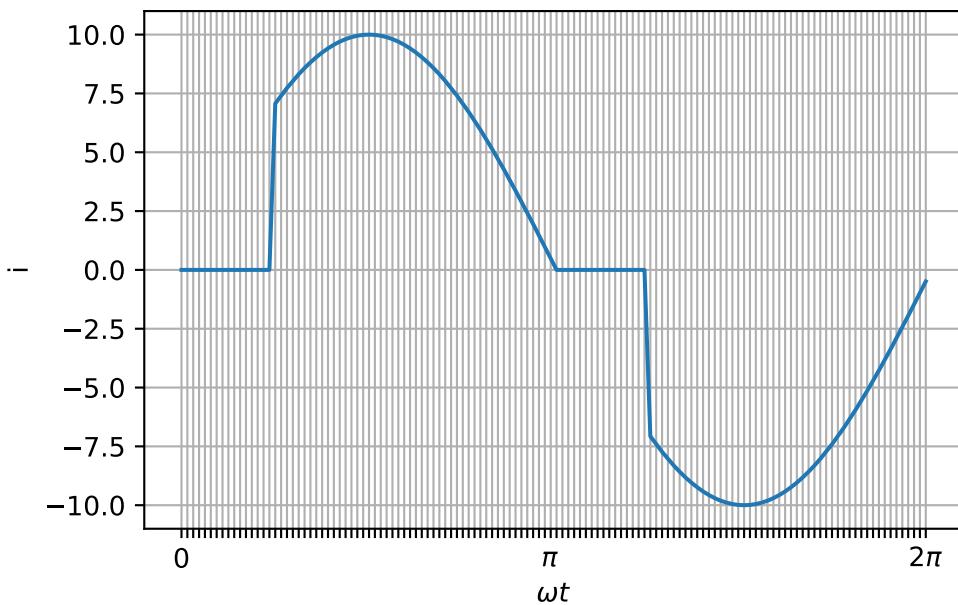


Abbildung 18.11.: Aufgabe 3.4

🔥 Lösung

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d\omega t}$$

$$\int_0^{2\pi} i^2 d\omega t = 2 \int_0^\pi i^2 d\omega t = 2 \int_0^\pi \hat{i}^2 \cdot \sin^2(\omega t) d\omega t$$

$$2 \int_0^\pi \hat{i}^2 \cdot \sin^2(\omega t) d\omega t = 2\hat{i}^2 \left(\frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{4}\sin(2\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\pi} = \hat{i}^2 \left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \right)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} i^2 d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \hat{i}^2 \left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \right)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot (10A)^2 \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ) \right)} = 6.74A$$

18.3.5. Aufgabe 3.5

An einem ohmschen Widerstand $R = 30\Omega$ liegt eine mittelwertfreie Dreiecksspannung mit der Amplitude $\hat{u} = 9V$ und der Frequenz $f = 100Hz$ an.

Welche Wirkleistung P wird im zeitlichen Mittel im Widerstand R umgesetzt?

 Lösung

Dreiecksspannung → Scheitelfaktor $\xi = \sqrt{3}$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = \frac{9V}{\sqrt{3}} = 5.196V$$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{5.196V}{30\Omega} = 0.9W$$

18.3.6. Aufgabe 3.6

An einem ohmschen Widerstand R liegt eine Zäげ Zahnspannung, die von einer Gleichspannung überlagert ist, an:

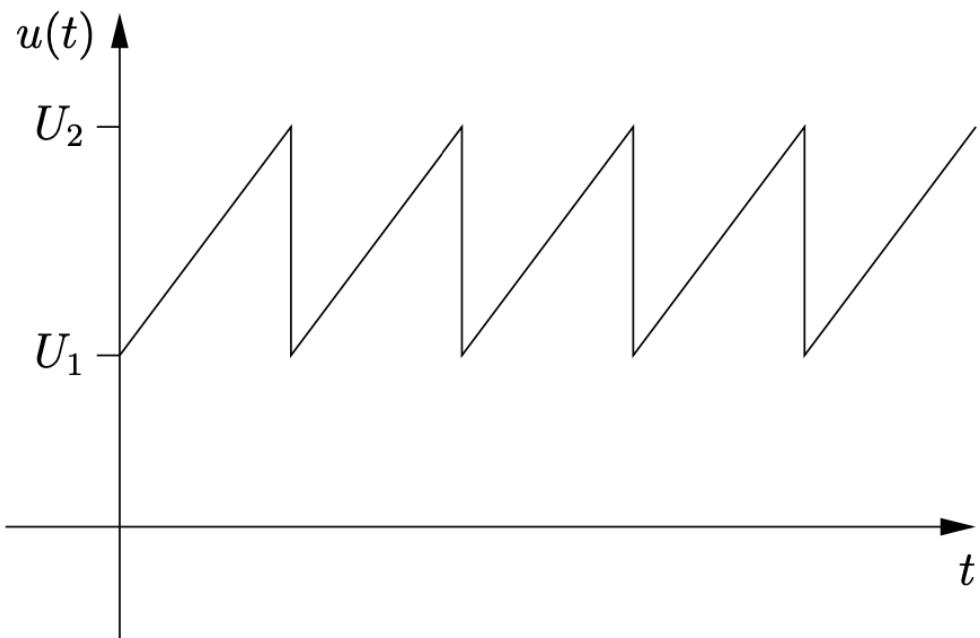


Abbildung 18.12.: Aufgabe 3.6

Entn. aus [23]

- Bestimmen Sie den Mittelwert $\overline{u(t)}$ des periodischen Spannungsverlaufes $u(t)$.
- Berechnen Sie den Effektivwert U des periodischen Spannungsverlaufes $u(t)$.
- Welche Wirkleistung P wird im zeitlichen Mittel im Widerstand R umgesetzt? (23.4)

🔥 Lösung

a)

$$\overline{u(t)} = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

b)

$$U = \sqrt{\left(\frac{U_2 - U_1}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)^2}$$

c)

$$P = \frac{U^2}{R}$$

18.3.7. Aufgabe 3.7

Durch den ohmschen Widerstand R fließt ein Sinusstrom, der mit einem Gleichstrom überlagert ist:

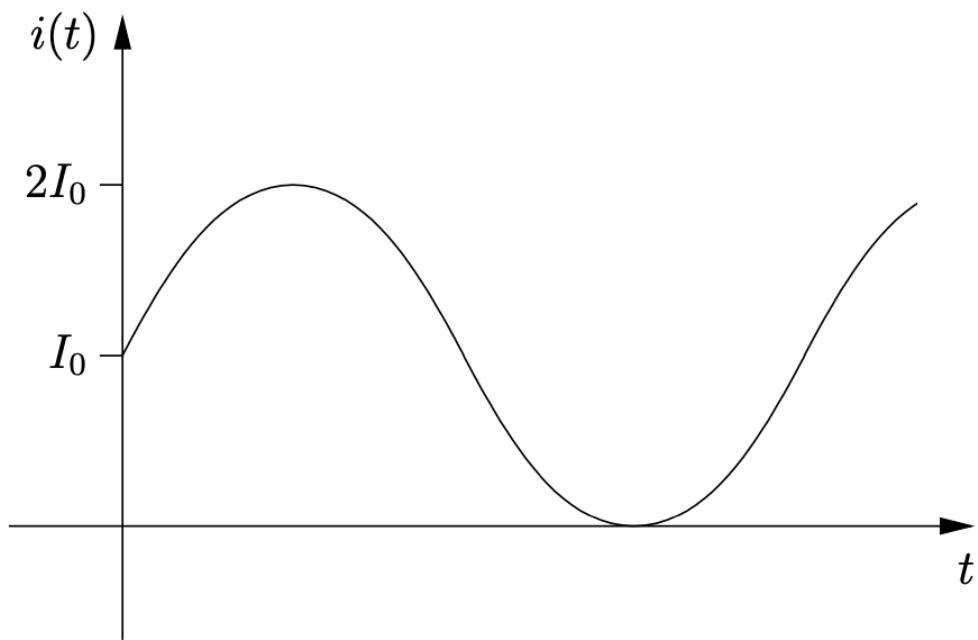


Abbildung 18.13.: Aufgabe 3.7

Entn. aus [23]

18. Periodische Signale

- a) Bestimmen Sie den Mittelwert $\overline{i(t)}$ des periodischen Stromverlaufes $i(t)$.
- b) Berechnen Sie den Effektivwert I des periodischen Stromverlaufes $i(t)$.
- c) Welche Wirkleistung P wird im zeitlichen Mittel im Widerstand R umgesetzt? (23.6)

Lösung

a)

$$\overline{i(t)} = I_0$$

b)

$$I = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

c)

$$P = I^2 \cdot R$$

19. Komplexe Größen der Wechselstromtechnik

- Zeigerdiagramm
- Komplexe Drehzeiger
- Komplexer Festzeiger
- Komplexer Widerstand
- Komplexer Leitwert

19.1. Zeigerdiagramm

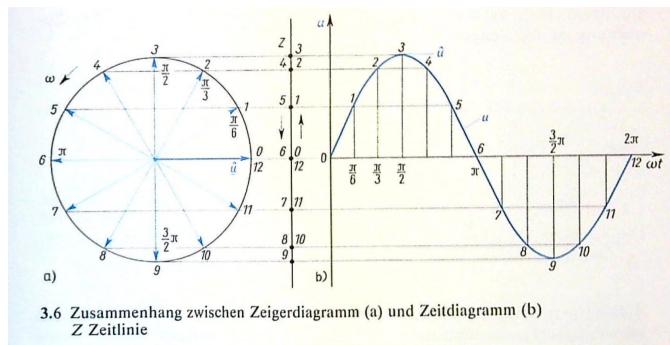


Abbildung 19.1.

Entn. aus [22]

Der Zeiger einer Sinusgröße ist wie die Sinusschwingung (physikalische Größe) durch 4 Kennwerte festgelegt:

- Die Art der Größe (z.B. Spannung, Strom, magn. Fluss) ist durch das Formelzeichen festgelegt.
- Der Betrag der Größe wird durch die Länge des Zeigers angegeben. Hier ist ein Maßstab notwendig.
- Die Phasenlage zwischen zwei Sinusgrößen kann durch die Phasenwinkel berücksichtigt werden.
- Die Frequenz ergibt sich aus der Kreisfrequenz und kann im Zeigerdiagramm nur als Momentaufnahme dargestellt werden.

Entn. aus [22]

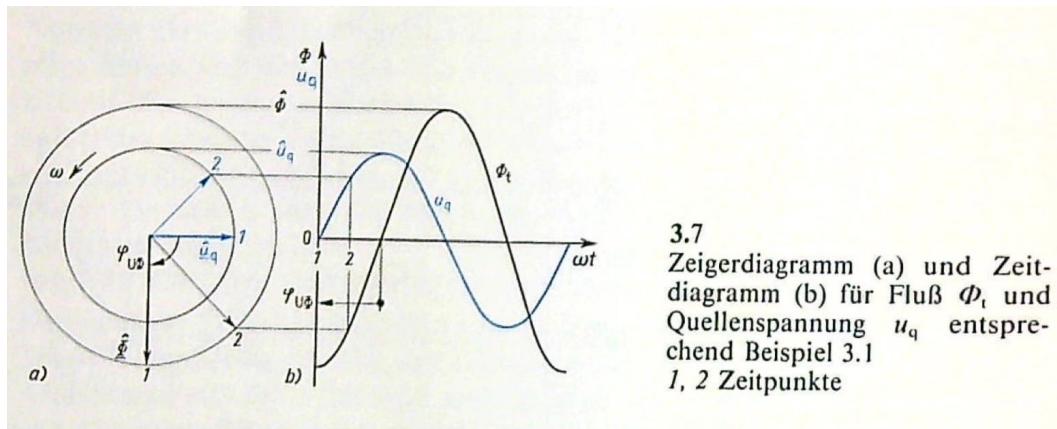


Abbildung 19.2.

In der praktischen Sinustechnik wird oft mit dem Effektivwert gerechnet, daher ist es durchaus üblich, dass der Zeiger auch mal Effektivwerte angibt. Dies macht keinen Unterschied auf die Phasenlage.

19.2. Übungen Teil 1

19.2.1. Übung 4.1 (Beispiel 3.6)

Von 2 Spannungen mit den Effektivwerten $U_1 = 30V$ und $U_2 = 50V$ eilt \underline{U}_1 um den Phasenwinkel $\varphi_{21} = 60^\circ$ gegenüber \underline{U}_2 voraus. Wie groß sind die Effektivwerte der Gesamtspannungen und ihre Phasenwinkel gegenüber der Bezugsspannung \underline{U}_2 , wenn die Generatoren G mit den Spannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 nach Bild 3.10a in Summenreihenschaltung oder nach Bild 3.10b in Gegenreihenschaltung liegen?

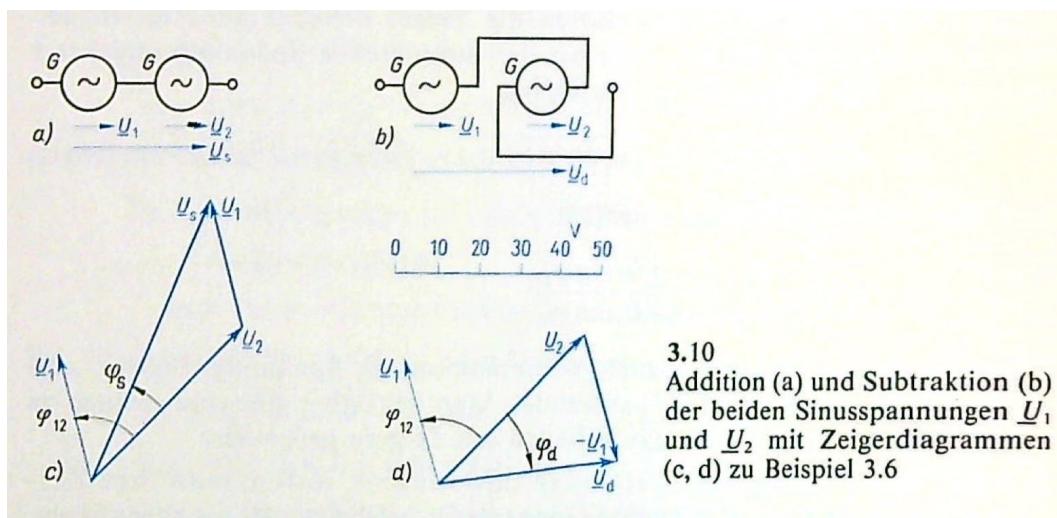


Abbildung 19.3.

Entn. aus [22]

 Lösung 4.1

Berechnung Summenspannung:

$$U_s = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos(\varphi)} = \sqrt{30^2 V^2 + 50^2 V^2 + 2 \cdot 30V \cdot 50V \cos(60^\circ)} = 70V$$

Berechnung Phasenwinkel:

$$\varphi_s = \arctan\left(\frac{U_1 \sin(\varphi) + U_2 \sin(0^\circ)}{U_1 \cos(\varphi) + U_2 \cos(0^\circ)}\right) = \arctan\left(\frac{30V \sin(60^\circ) + 50V \sin(0^\circ)}{30V \cos(60^\circ) + 50V \cos(0^\circ)}\right) = 21.79^\circ$$

Berechnung Differenzspannung:

$$U_d = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 2U_1 U_2 \cos(\varphi)} = \sqrt{30^2 V^2 + 50^2 V^2 - 2 \cdot 30V \cdot 50V \cos(60^\circ)} = 43.59V$$

Berechnung Phasenwinkel:

$$\varphi_s = \arctan\left(\frac{-U_1 \sin(\varphi) + U_2 \sin(0^\circ)}{-U_1 \cos(\varphi) + U_2 \cos(0^\circ)}\right) = \arctan\left(\frac{-30V \sin(60^\circ) + 50V \sin(0^\circ)}{-30V \cos(60^\circ) + 50V \cos(0^\circ)}\right) = -36.59^\circ$$

19.3. Komplexer Drehzeiger

Überträgt man die Zeiger aus den Zeigerdiagrammen in die komplexe Ebene, dann kann man den Zeiger vollständig durch eine komplexe Zahl beschreiben. Dadurch wird das geometrische Zeigerzusammensetzen in eine reine Zahlenrechnung überführt.

Wendet man die komplexe Rechnung auf Zeigerdiagramme für Ströme, Spannungen, Leistungen, Widerstände und Leitwerte an, wird der Charakter dieser Größen nicht verändert. Sie sind weiterhin von der Zeit abhängig und schwingen. Man wechselt nur aus dem für die Rechnung umständlichen Zeitbereich in den Zeigerbereich über, in die Rechnung durch komplexe Zahlen einfacher ist.

Entn. aus [22]

Ein Punkt in der Komplexen Ebene (in Polarkoordinaten) wird mit den Nullpunkt-Abstand \hat{u} (Scheitelwert der Sinusspannung), dem zur Zeit t=0 Winkel φ_u (Nullphasenwinkel) und der Winkelgeschwindigkeit ω (Kreisfrequenz der Sinusspannung) beschrieben.

$$\underline{u} = \hat{u} e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} e^{j\omega t} e^{j\varphi_u} = \hat{u} \angle(\omega t + \varphi_u) = \hat{u} \angle(\omega t) \angle \varphi_u$$

Der Zeitwert der Spannung u wird über den Imaginärteil der komplexen Zahl dargestellt.

$$\text{Im}\{\underline{u}\} = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

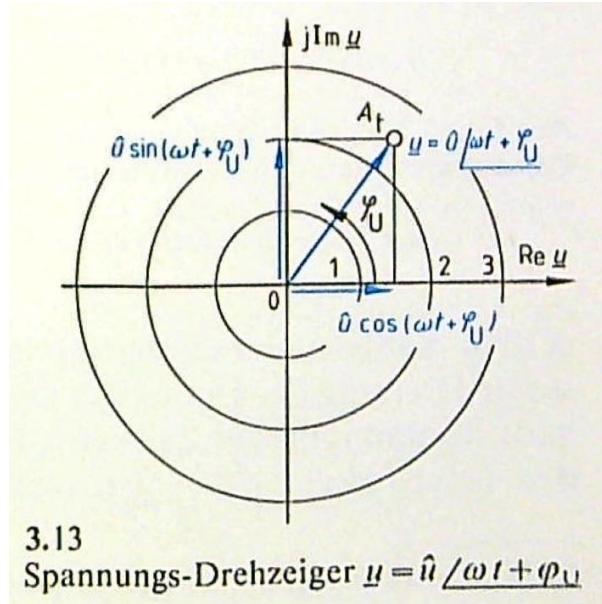


Abbildung 19.4.

19.4. Komplexer Festzeiger

Man benötigt die konstante Drehung der Drehzeiger mit der Winkelgeschwindigkeit ω nur für die Bestimmung der Zeitwerte. Man kann also für die meisten Betrachtungen auf den Drehfaktor $e^{j\omega t} = \angle(\omega t)$ verzichten. Wenn der Drehfaktor eliminiert wird, dann bleibt nur noch ein Festzeiger übrig:

$$\hat{\underline{u}} = ue^{j\varphi_u} = u\angle\varphi_u$$

Dies entspricht dem Zeiger bei $t = 0$. Da sich Scheitelwert und Effektivwert nur durch einen festen Faktor unterscheiden, darf man auch in der Gleichung den Effektivwert benutzen.

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u} = U\angle\varphi_u$$

Wenn wir den Strom als Bezugsgröße wählen und in die reelle Achse packen, dann kann die Spannung, wenn sie phasenverschoben ist, in einen Realanteil und einen Imaginäranteil zerlegt werden.

Entn. aus [22]

Man bezeichnet den Realanteil als Wirkanteil U_w und den Imaginäranteil als Blindanteil U_b . Damit setzt sich \underline{u} aus beiden Anteilen zusammen:

$$\underline{U} = U\angle\varphi = U_w + jU_b$$

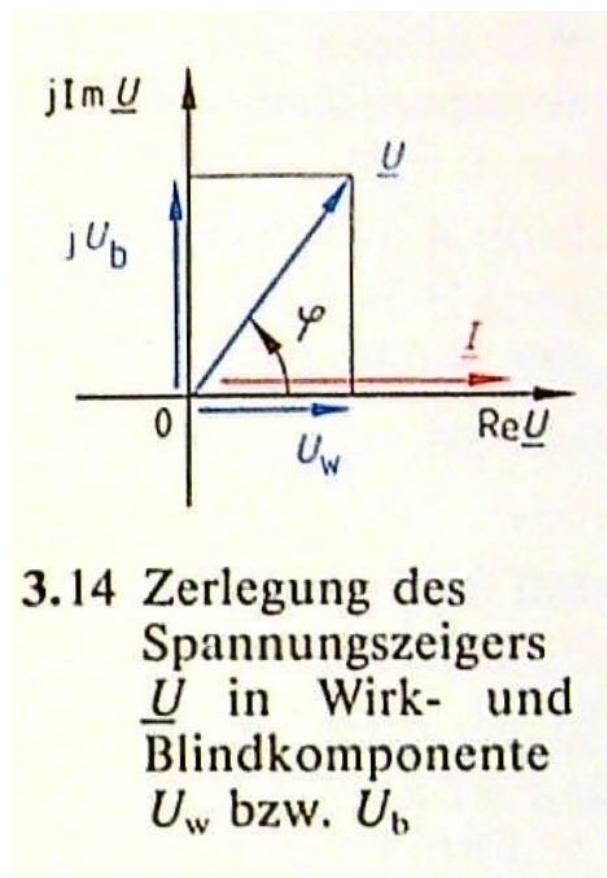


Abbildung 19.5.

19.5. Komplexer Widerstand

Die Anwendung des Ohmschen Gesetzes auf komplexe Ströme und Spannungen liefert wieder komplexe Größen. Eine wichtige Größe ist dabei der komplexe Widerstand.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{U}e^{j\omega t}e^{j\varphi_u}}{\hat{I}e^{j\omega t}e^{j\varphi_i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \angle(\varphi_u - \varphi_i) = Z \angle \varphi = R + jX$$

19.6. Komplexer Leitwert

Die Gegengröße dazu ist der komplexe Leitwert.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\hat{I}e^{j\omega t}e^{j\varphi_i}}{\hat{U}e^{j\omega t}e^{j\varphi_u}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \angle(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \angle \varphi} = \frac{1}{Z} \angle(-\varphi) = G + jB$$

Die Komponenten werden als Impedanz Z , Wirkwiderstand R , Blindwiderstand X , Admittanz Y , Wirkleitwert G und Blindleitwert B bezeichnet.

19.7. Übungen Teil 2

19.7.1. Übung 4.2

Es soll für eine Netzspannung mit $U = 220V$ mit der Frequenz $f = 50Hz$ der komplexe Zeitwert für den Nullphasenwinkel $\varphi_u = -60^\circ$ angegeben werden und den Zeitwert u für die Zeit $t = 12ms$ bestimmen.

Lösung 4.2

Scheitelwert bestimmen:

$$\hat{U} = U \cdot \sqrt{2} = 220V \cdot \sqrt{2} = 311.1V$$

Kreisfrequenz bestimmen:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 314.2s^{-1}$$

Komplexer Zeitwert:

$$\underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t + \varphi_u)} = 311.1V \cdot e^{j(314.2s^{-1}t - 60^\circ)} = 311.1V \angle(314.2s^{-1}t - 60^\circ)$$

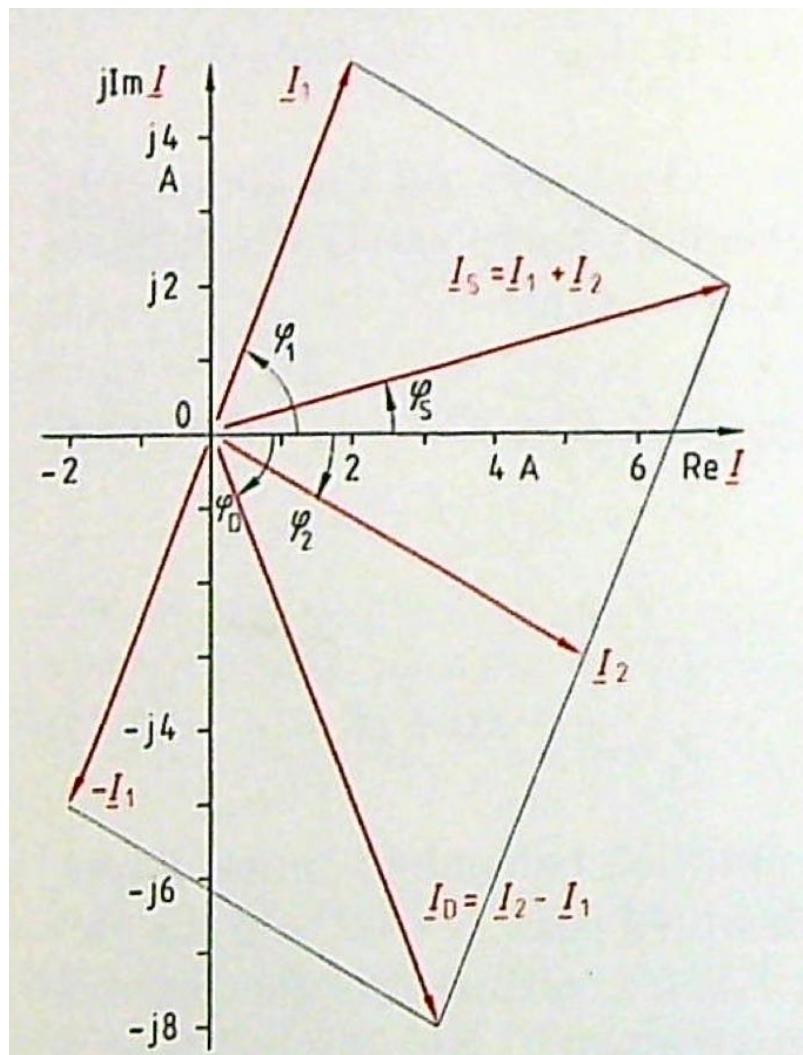
Zeitwert:

$$u = Im\{\underline{u}\} = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = 311.1V \cdot \sin(314.2s^{-1} \cdot 12ms - 60^\circ) = 126.5V$$

19.7.2. Übung 4.3

Man bilde in der komplexen Zahleebene mit den beiden komplexen Strömen $\underline{I}_1 = (2+j5)A$ und $\underline{I}_2 = 6A \angle -30^\circ$ den Summenstrom $\underline{I}_s = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ und den Differenzenstrom $\underline{I}_d = \underline{I}_2 - \underline{I}_1$. (mit Zeichnung)

Lösung 4.3



3.15 Summe $\underline{I}_s = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ und Differenz $\underline{I}_D = \underline{I}_2 - \underline{I}_1$ von zwei komplexen Strömen \underline{I}_1 und \underline{I}_2

Abbildung 19.6.

Entn. aus [22]

Umformung der Exponentialform:

$$I_2 = (5.196 - j3)A$$

Summenbildung:

$$I_s = (2 + 5.196)A + j(5 - 3)A = (7.196 + j2)A$$

Betrag:

$$I_s = \sqrt{7.196^2 + 2^2}A = 7.469A$$

Phase:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2A}{7.196A}\right) = 15.53^\circ$$

Differenzenbildung:

$$I_d = (-2 + 5.196)A + j(-5 - 3)A = (3.196 - j8)A$$

Betrag:

$$I_s = \sqrt{3.196^2 + 8^2}A = 8.615A$$

Phase:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2A}{7.196A}\right) = -68.22^\circ$$

19.7.3. Übung 4.4

Bestimme den Scheitelpunkt, Effektivwert, Frequenz, Periode, Nullphasenwinkel und die Phasenverschiebung (I_2 als Bezugsgröße) beider Ströme. Stelle die Gleichung für beide Ströme im Zeitbereich und in der komplexen Ebene auf.

Lösung 4.4

Scheitelpunkt:

$$\hat{i}_1 = 2A$$

$$\hat{i}_2 = 1.5A$$

Effektivwert:

$$I_1 = 1.414A$$

$$I_2 = 1.061A$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f=1
i1_s = 2
i2_s = 1.5
phi1 = -np.pi/3
phi2 = np.pi/4
t = np.arange(-2,2,0.001)

sin1 = i1_s * np.sin(2*np.pi*f*t + phi1)
sin2 = i2_s * np.sin(2*np.pi*f*t + phi2)

plt.plot(t,sin1,label='Strom 1')
plt.plot(t,sin2,label='Strom 2')
plt.xlabel('Zeit in ms')
plt.ylabel('Strom in A')
plt.xlim(-0.5,2)
plt.grid()
plt.legend()

```

Abbildung 19.7.

Frequenz:

$$f = 1000 \text{ Hz}$$

Periode:

$$T = 1 \text{ ms}$$

Nullphasenwinkel:

$$\varphi_{i1} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\varphi_{i2} = \frac{\pi}{4}$$

Phasenverschiebung:

$$\varphi = -\frac{7\pi}{12}$$

Zeitbereich:

$$i_1 = 2A \cdot \sin(2000\pi t - \pi/3)$$

$$i_2 = 1.5A \cdot \sin(2000\pi t + \pi/4)$$

19. Komplexe Größen der Wechselstromtechnik

Komplexe Ebene:

$$\underline{i}_1 = 2A \cdot e^{j(2000\pi t - \pi/3)} = 2A \angle(-\pi/3)$$

$$\underline{i}_1 = 1.5A \cdot e^{j(2000\pi t + \pi/4)} = 1.5A \angle(\pi/4)$$

20. Verhalten der Grundzweipole 1

- Zweipole
- Wirkwiderstand
- Kapazität
- einfache Schaltungen

20.1. Zweipole

Alle Bauelemente mit zwei Anschlüssen bezeichnet man als Zweipol. Wenn diese keine Energie erzeugen, ist dies ein passiver Zweipol.

Aus Gleichstromschaltungen sind in Zusammenhang mit dem passiven Zweipole nur Widerstände R wirksam. Induktivitäten L verursachen bei Gleichstrom keine Spannung und Kapazitäten wirken bei Gleichstrom wie eine Leitungsunterbrechung.

Da die Spannung und der Strom nun, da diese Größen nun Wechselgrößen sind, mit einem magnetischen und elektrischen Feld (siehe Elektrodynamik) verkettet sind, wirken sie jetzt anders auf Kapazitäten und Induktivitäten.

Daher haben wir nun bei Wechselstrom, die drei passiven Zweipole Widerstand R, Kapazität C und Induktivität L. An diesen Bauteilen ist insbesondere auf den Zusammenhang von Spannung und Strom zu achten.

20.2. Wirkwiderstand

Als erstes betrachten wir den reinen Wirkwiderstand R (Resistanz) bzw. den reinen Wirkleitwert G = 1 / R (Konduktanz). Er liegt an einer Sinusspannung

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

20.2.1. Spannung, Strom und Phasenwinkel

Über das Ohmsche Gesetz kommt man an die Gleichung für den Strom:

$$i = G \cdot u = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$$

20. Verhalten der Grundzweipole 1

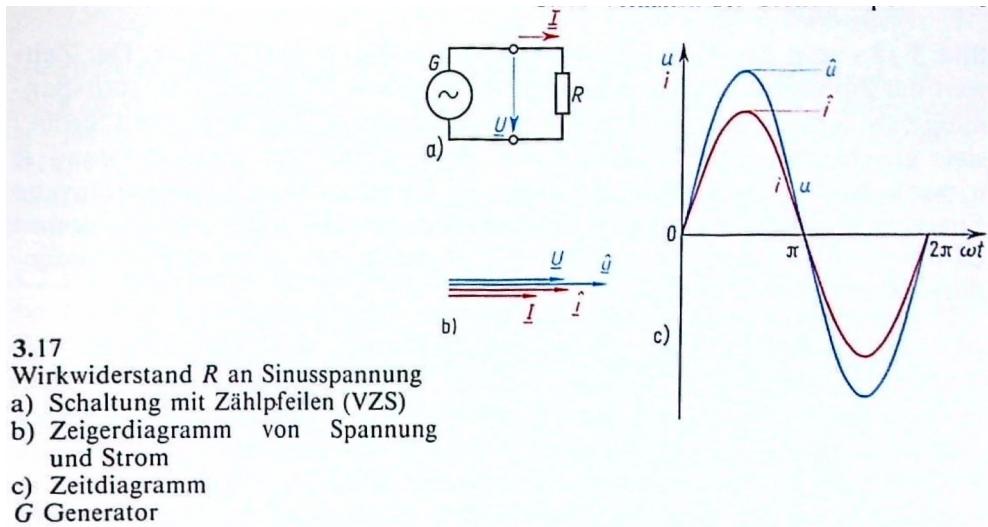


Abbildung 20.1.

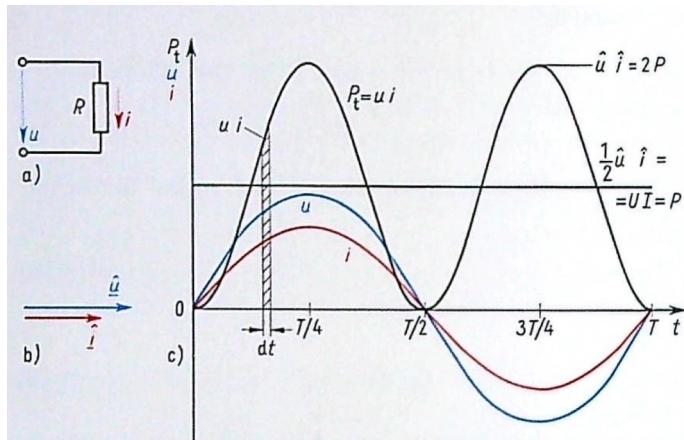
Strom i und Spannung u sind zu jedem Augenblick zueinander proportional (linearen Wirkwiderstand). Beide haben die gleiche Phasenlage, dass heißt einen Phasenwinkel von $\varphi = 0$.

Ent. aus [22]

20.2.2. Wirkleistung

Für den Zeitwert der Leistung gilt:

$$P_t = u \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{u^2}{R} = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \sin^2(\omega t)$$



3.18 Leistungsumsatz in einem Wirkwiderstand R an Sinusspannung
a) Schaltung mit Zählpfeilen (VZS), b) Zeigerdiagramm für Spannung \hat{u} und Strom \hat{i} , c) Zeitdiagramm von Spannung u , Strom i und Leistung P_t

Abbildung 20.2.

Entn. aus [22]

Der Zeitwert der Leistung schwingt mit der doppelten Frequenz und ist immer positiv. Der Wirkwiderstand R nimmt also immer Energie auf.

Um einen Vergleich mit Gleichstrom machen zu können, schaut man sich die mittlere Leistung, also die Wirkleistung an:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot idt = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Ein Heizofen, beispielsweise, erzeugt mit einer Nennspannung U und Nennleitung P die gleiche Wärme an Gleich- und Sinusspannung mit gleichen Zahlenwerten.

20.3. Kapazität

Hier wird erst mal die reine Kapazität betrachtet, also der Einfluss des elektrischen Feldes. Der Zuleitungswiderstand, eventuelle Ableitungen, dielektrischen Verluste und der Einfluss des magnetischen Feldes werden vernachlässigt.

20.3.1. Spannung, Strom und Phasenwinkel

Für den Ladestrom einer Kapazität C gilt:

! Kapazität

$$i = C \frac{du}{dt}$$

Betrachtet man den Strom, der sich wieder über die Sinusspannung ergibt, bekommt man diese Gleichung:

$$i = C \frac{d(\hat{u} \cdot \sin(\omega t))}{dt} = \omega C \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$$

mit

$$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$$

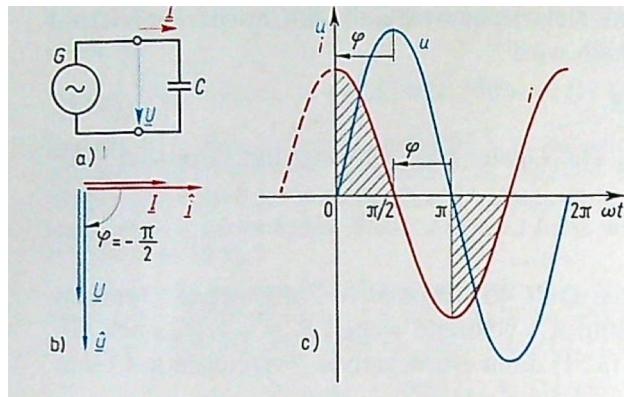
ergibt sich:

$$i = \omega C \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$$

Entn. aus [22]

Komplexer Schreibweise:

20. Verhalten der Grundzweipole 1



- 3.22
Kapazität C an Sinusspannung
a) Schaltung mit Zählpfeilen (VZS)
b) Zeigerdiagramm von Spannung und Strom
c) zugehöriges Zeitdiagramm
 G Generator

Abbildung 20.3.

$$i = C \frac{du}{dt} = C \hat{u} \frac{de^{j\omega t}}{dt} = j\omega C \hat{u} e^{j\omega t} = j\omega C \underline{u}$$

Der Strom i eilt also bei einer Kapazität C gegenüber der Spannung u um den Phasenwinkel $90^\circ = \pi/2$ vor.

! Merkspruch

Beim Kondensator eilt der Strom vor!

i Hinweis

Da nach der Norm der Strom die Bezugsgröße ist, sagt man, dass der Phasenwinkel $\varphi = -\pi/2 = -90^\circ$ ist.

20.3.2. Kapazitiver Blindwiderstand

Aus der obigen Gleichung können wir den kapazitiven Blindleitwert B_C ableiten:

$$\hat{i} = \omega C \hat{u} = B_C \hat{u}$$

mit

$$B_C = \omega C = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \frac{I}{U}$$

Stellt man dies komplex für den kapazitiven Blindwiderstand dar, erhält man:

$$\frac{u}{i} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{jB_C} = jX_C$$

20.4. Einfache Schaltungen

20.4.1. Reihenschaltung

Komplexer Maschensatz:

$$\sum_{\mu=1}^n \hat{u}_\mu = \sum_{\mu=1}^n U_\mu = 0$$

20.4.2. Parallelschaltung

Komplexer Knotenpunktsatz:

$$\sum_{\mu=1}^n \hat{i}_\mu = \sum_{\mu=1}^n I_\mu = 0$$

20.5. Übungen

20.5.1. Übung 5.1

(Fricke/Vaske Beispiel 3.17)

An einem Kondensator mit der Kapazität $C = 8\mu F$ liegt die Sinusspannung $U = 220V$ an. Der Strommesser zeigt den Strom $I = 0,55A$ an. Welche Frequenz liegt vor?

 Lösung 5.1

$$f = \frac{B_C}{2\pi \cdot C} = \frac{I}{2\pi U C} = \frac{0,55A}{2\pi \cdot 220V \cdot 8\mu F} = 49,74Hz$$

20.5.2. Übung 5.2

(Fricke/Vaske Beispiel 3.18)

In einer Schaltung wird bei der Frequenz $f = 100MHz$ und der Spannung $U = 60mV$ der durch die Schaltkapazität C verursachte Strom $I = 0,6mA$ gemessen.

- a) Wie groß sind Blindleitwert B_C und Schaltkapazität C ?
- b) Wie groß ist bei gleichbleibender Spannung U der Strom I' , wenn die Frequenz auf $f' = 2GHz$ erhöht wird?

 Lösung 5.2

a)

$$B_C = \frac{I}{U} = \frac{0,6mA}{60mV} = 10mS$$

$$C = \frac{B_C}{\omega} = \frac{10mS}{2\pi \cdot 100MHz} = 15,92pF$$

b)

$$I' = I \frac{f'}{f} = 0,6mA \frac{2GHz}{100MHz} = 12mA$$

20.5.3. Übung 5.3

(Fricke/Vaske Beispiel 3.25)

Die folgende Schaltung zeigt die Spannungen $\underline{U}_{q1} = 100V \angle (-100^\circ)$, $\underline{U}_{q2} = 50V \angle (-90^\circ)$, $\underline{U}_1 = 80V \angle (20^\circ)$, $\underline{U}_2 = 70V \angle (-20^\circ)$ und $\underline{U}_3 = 90V \angle (-40^\circ)$. Bestimme die Spannung \underline{U}_4 .

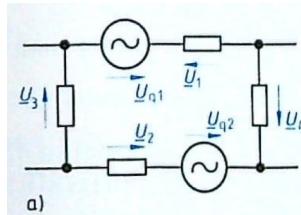
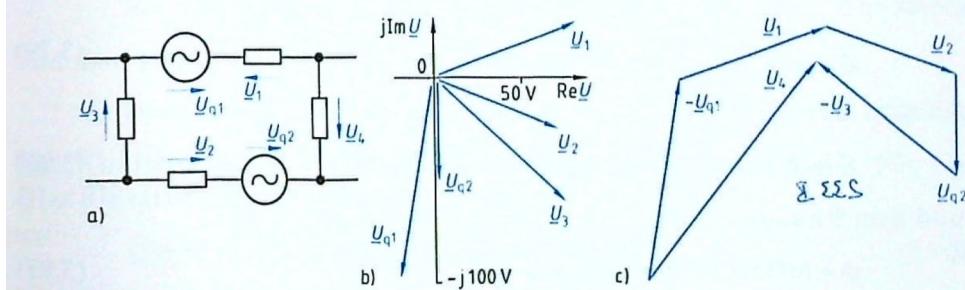


Abbildung 20.4.

Entn. aus [22]

🔥 Lösung 5.3


3.31 Masche (a) mit komplexen Spannungen (b) und Zeigerdiagramm der Spannungssumme (c) $\underline{U}_4 = -\underline{U}_{q1} + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_{q2} - \underline{U}_3$

Abbildung 20.5.

Entn. aus [22]

$$\underline{U}_{q1} - \underline{U}_1 + \underline{U}_4 - \underline{U}_{q2} - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$$

$$\underline{U}_4 = (89, 36 + j109, 75) V = 141, 5 V \angle (50, 85^\circ)$$

20.5.4. Übung 5.4

(Fricke/Vaske Beispiel 3.29)

Wirkwiderstand $R = 500\Omega$ und Kapazität $C = 5\mu F$ liegen in Reihe. Für die Frequenz $f = 50Hz$ ist der komplexe Widerstand in Exponentialform zu bestimmen.

Tipp: Beachtet wie der Wirkwiderstand und Blindwiderstand in der komplexen Ebene liegen.

🔥 Lösung 5.4

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50Hz \cdot 5\mu F} = -636,6\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{500^2 + 636,6^2}\Omega = 809,5\Omega$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{-636,6\Omega}{500\Omega}\right) = -51,85^\circ$$

$$\underline{Z} = 809,5\Omega \angle (-51,85^\circ)$$

20.5.5. Übung 5.5

(Hagmann Aufgabe 6.9)

Ein ohmscher Widerstand von $R = 750\Omega$ ist mit einem Kondensator der Kapazität $C = 250nF$ in Reihe geschaltet. Die Anordnung wird nach dem Bild von einem sinusförmigen Strom mit dem Betrag (Effektivwert) $I = 50mA$ und der Frequenz $f = 800Hz$ durchflossen.

- Wie groß sind die Teilspannungen U_R und U_C , sowie die Gesamtspannung U ?
- Welcher Phasenverschiebungswinkel φ besteht zwischen den Spannungen U_C und U ?

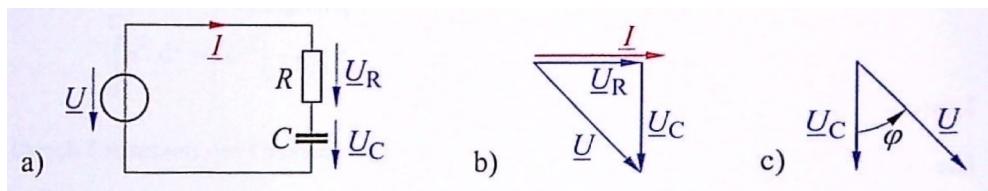


Bild 6.9 Wechselstromkreis mit ohmschem Widerstand und Kondensator. a) Gegebene Schaltung, b) Zeigerdiagramm aller Spannungen und des Stromes, c) Zeigerdiagramm der Spannungen U_C und U

Abbildung 20.6.

Entn. aus [25]

Lösung 5.5

Blindwiderstand:

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 800Hz \cdot 250nF} = 796\Omega$$

komplexe Spannung Widerstand:

$$U_R = IR = 50mA \cdot 750\Omega = 37,5V$$

komplexe Spannung Kondensator

$$U_C = I \frac{1}{j\omega C} = I \left(-j \frac{1}{\omega C} \right) = 50mA \cdot (-j796\Omega) = 39,8V \cdot e^{-j90^\circ}$$

komplexe Spannung gesamt

$$U = U_R + U_C = (37,5 + 39,8 \cdot e^{-j90^\circ}) V = 54,7V \cdot e^{-j46,7^\circ}$$

a)

$$U_R = 37,5V$$

$$U_C = 39,8V$$

$$U = 54,7V$$

b)

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_{Uc} = -46,7^\circ - (-90^\circ) = 43,3^\circ$$

20.5.6. Übung 5.6

(Hagmann Aufgabe 6.10)

Ein elektrischen Heizgerät für die Spannung $U = 230V$ besitzt den Widerstand (Wirkwiderstand) $R = 53\Omega$. Das Gerät soll nach dem nachfolgenden Bild über einen Kondensator (C) an eine Wechselspannung von $U' = 400V$ der Frequenz $f = 50Hz$ gelegt werden.

Wie groß muss die Kapazität C des Kondensators sein, damit das Heizgerät an $U = 230V$ liegt?

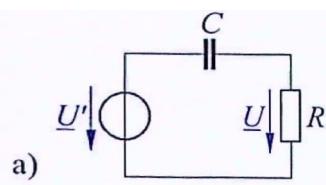


Abbildung 20.7.

Entn. aus [25]

Lösung 5.6

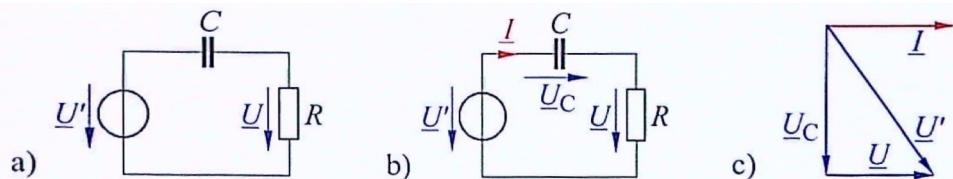


Bild 6.10 Anlegen eines Heizgerätes (mit dem Widerstand R) über einen Kondensator (C) an Wechselspannung. a) Gegebene Schaltung, b) Schaltung mit eingetragenen Pfeilen aller auftretenden Spannungen und des Stromes, c) zugehöriges Zeigerdiagramm

Abbildung 20.8.

Entn. aus [25]

20. Verhalten der Grundzweipole 1

$$I = \frac{U}{R} = \frac{230V}{53\Omega} = 4.34A$$

$$U_C = \sqrt{(U')^2 - U^2} = \sqrt{400^2 - 230^2}V = 327V$$

Wir wissen:

$$I = U_C \omega C$$

umstellen:

$$C = \frac{I}{U_C \omega} = \frac{4,34A}{327V \cdot 2\pi \cdot 50Hz} = 42,2\mu F$$

20.5.7. Übung 5.7

(Hagmann Aufgabe 6.14)

In der Parallelschaltung nach den folgenden Bild hat der ohmsche Widerstand den Wert $R_1 = 2k\Omega$ und der Kondensator die Kapazität $C_1 = 100nF$. Die Anordnung soll für die Frequenz $f = 1,4kHz$ durch die im Bild angegebene Reihenschaltung ersetzt werden.

Welche Werte sind für den Widerstand R_2 und die Kapazität C_2 erforderlich?

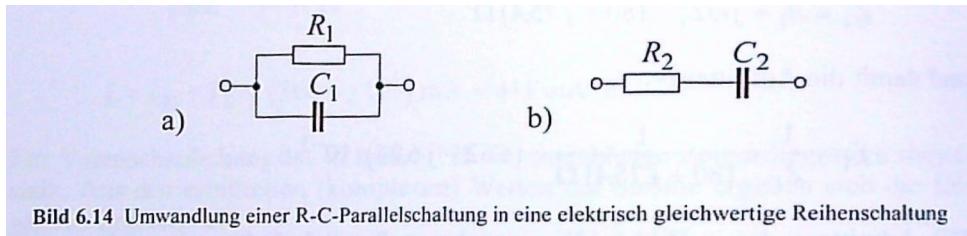


Bild 6.14 Umwandlung einer R-C-Parallelschaltung in eine elektrisch gleichwertige Reihenschaltung

Abbildung 20.9.

Entn. aus [25]

Lösung 5.7

Blindleitwert Parallelschaltung:

$$B_C = \omega C_1 = 2\pi \cdot 1,4kHz \cdot 100nF = 880\mu S$$

Admittanz Parallelschaltung:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1} + jB_C = \frac{1}{2k\Omega} + j880\mu S = (500 + j880)\mu S$$

Impedanz Parallelschaltung:

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1} = \frac{1}{(500 + j880)\mu S} = (488 - j859)\Omega$$

Impedanz Reihenschaltung

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2}$$

gleichsetzen:

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = (488 - j859) \Omega$$

Kapazität:

$$C_2 = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1,4kHz \cdot 859\Omega} = 132nF$$

21. Verhalten der Grundzweipole 2

- Induktivität
 - Spannung, Strom, Phasenwinkel
 - Induktiver Blindwiderstand
 - Induktive Blindleistung
- Kapazitive Blindleistung
- Kapazität und Induktivität im Vergleich

21.1. Induktivität

Es wird hier eine reine Induktivität betrachtet, es werden also nur die Einflüsse des magnetischen Feldes berücksichtigt. Vernachlässigt werden die Wirkungen des elektrostatischen Feldes und der Leiterwiderstand.

21.1.1. Spannung, Strom und Phasenwinkel

An einer Induktivität gilt die Beziehung zwischen Spannung und Strom:

! Induktivität

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Setzt man für den Strom die Gleichung

$$i = -\hat{i} \cos(\omega t) = \hat{i} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

ein, erhält man für den Verlauf der Spannung:

$$u = L \frac{di}{dt} = -L\hat{i} \frac{d(\cos(\omega t))}{dt} = \omega L \hat{i} \sin(\omega t) = \hat{u} \sin(\omega t)$$

Entn. aus [22]

In komplexer Schreibweise erhält man:

$$\underline{u} = L \frac{di}{dt} = L\hat{i} \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L \hat{i} e^{j\omega t} = j\omega L \underline{i}$$

21. Verhalten der Grundzweipole 2

- 3.19**
Induktivität L an Sinusspannung
 a) Schaltung mit Zählpfeilen (VZS)
 b) Zeigerdiagramm von Spannung und Strom
 c) zugehöriges Zeitdiagramm
 G Generator

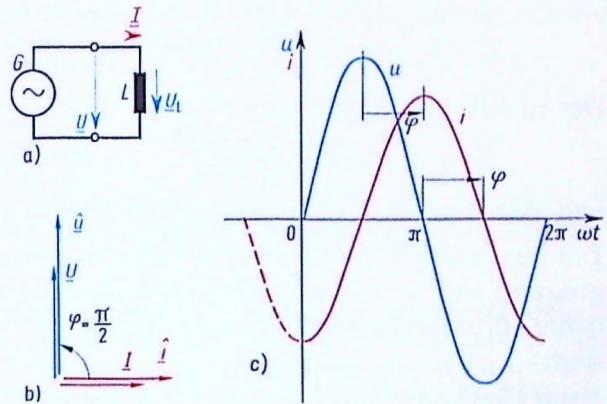


Abbildung 21.1.

Strom und Spannung zeigen eine Phasenverschiebung von $\pi/2 = 90^\circ$. Die Spannung eilt den Strom um den Phasenwinkel $\varphi = \pi/2 = 90^\circ$ vor.

! Merkspruch

Bei der Induktivität kommt der Strom zu spät!

21.1.2. Induktiver Blindwiderstand

Setzt man den Scheitelwert von Strom und Spannung ins Verhältnis erhält man:

$$\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = \omega L = X_L$$

Den Widerstand bezeichnet man als induktiven Blindwiderstand.

Komplex dargestellt:

$$\frac{u}{i} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = j\omega L = jX_L = \frac{1}{jB_L}$$

Der induktive Blindleitwert nimmt daher negative Werte an:

$$B_L = -\frac{1}{\omega L} = -\frac{1}{X_L}$$

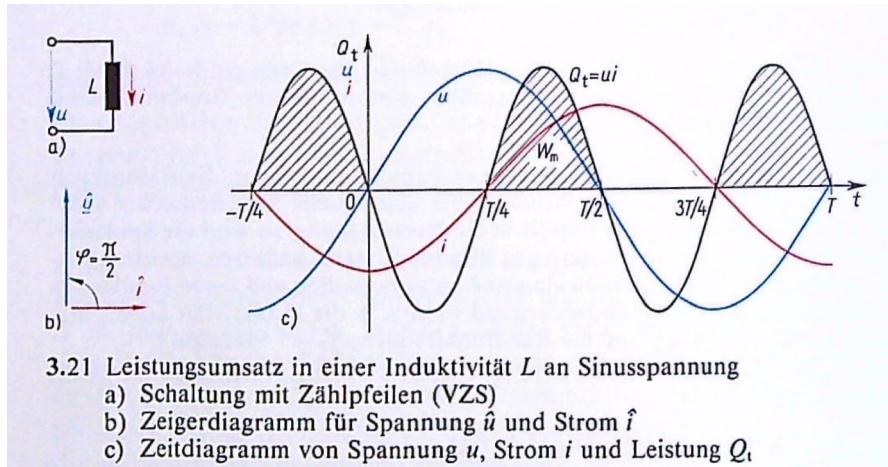


Abbildung 21.2.

21.1.3. Induktive Blindleistung

Enzn. aus [22]

Die Leistung an einer Induktivität schwingt zwar, wie beim Wirkwiderstand mit doppelter Frequenz, aber wechselt immer zwischen positiv und negativ. Sie nimmt damit während einer Spannungs-Viertelperiode Energie auf und baut ein magnetischen Feld auf. Während der nächsten Spannungs-Viertelperiode wird das Magnetfeld unter Energieabgabe wieder abgebaut.

Die mittlere Leistung, also die Wirkleistung, ist somit $P = 0$. Man nimmt daher auch zur Bezeichnung der Blindleistung den Formelbuchstaben P, sondern das Q. Es wird keine elektrische Energie in Wärme oder mechanische Leistung umgewandelt, deshalb nennt man es Blindleistung.

$$Q = UI = I^2 X_L = -U^2 B_L$$

21.2. Kapazitive Blindleistung

Enzn. aus [22]

Analog zur induktiven Blindleistung ist auch die kapazitive Blindleistung mit der doppelten Frequenz am schwingen und hat die mittlere Leistung, also Wirkleistung, $P = 0$. Die Energie kommt hier aus dem Auf- und Abbau elektrischer Felder.

Im Vergleich zwischen kapazitiver und induktiver Blindleistung stellt man fest, dass diese um 180° versetzt zueinander schwingen. Man setzt daher die kapazitive Blindleistung negativ an.

$$Q = -UI = -U^2 B_C = I^2 X_C$$

21. Verhalten der Grundzweipole 2

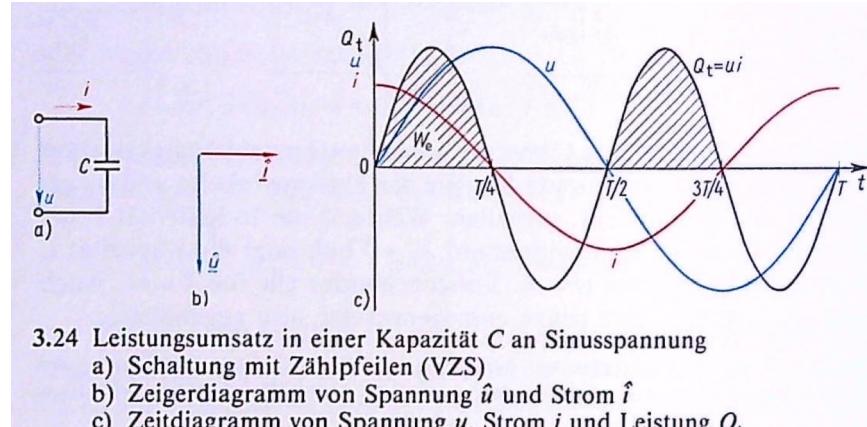


Abbildung 21.3.

21.3. Allgemeiner passiver Sinusstrom-Zweipol

21.3.1. Scheinwiderstand und Scheinleitwert

In einem Zweipol können Wirkwiderstände, Kapazitäten, Induktivitäten oder Kombinationen daraus enthalten sein. Man nennt einen Widerstand, der aus Wirkwiderstände, Kapazitäten, Induktivitäten oder aus Kombinationen bestehen kann, einen Scheinwiderstand.

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$$

Daneben gibt es auch den Scheinleitwert:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = \frac{\hat{i}}{\hat{u}}$$

oder komplex dargestellt:

$$\underline{Z} = \frac{u}{i} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I} = Z \angle \varphi = R + jX$$

komplexer Leitwert:

$$\underline{Y} = \frac{I}{U} = Y \angle \varphi_Y = \frac{1}{Z} \angle (-\varphi) = G + jB$$

Entn. aus [22]

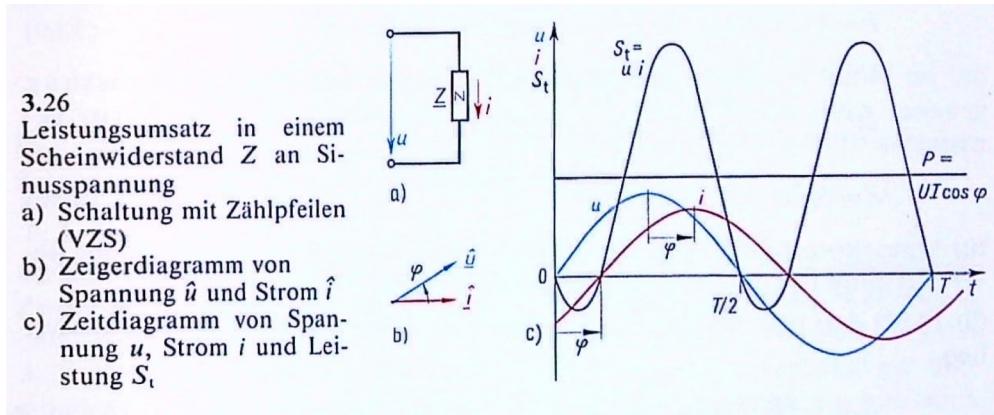


Abbildung 21.4.

21.3.2. Leistungen

Zeitwert der Leistung:

$$S_t = ui = \hat{u}\hat{i} \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} (\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)) = UI \cos(\varphi) - UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z}$$

Es wird also im Zeitwert ein konstanter Leistungswert $S \cos(\varphi)$ von einer Leistungsschwingerung $S \cos(2\omega t + \varphi)$ überlagert.

Mittelwert oder Wirkleistung:

$$P = S \cdot \cos(\varphi) = UI \cdot \cos(\varphi)$$

Das Verhältnis der Wirkleistung zur Scheinleistung wird als *Leistungsfaktor* oder auch *Wirkfaktor* bezeichnet.

$$\lambda = \cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

Scheinleistung kann aus Wirk- und Blindleistung bestehen. Die Blindleistung kann man über diese Formel berechnen:

$$Q = UI \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sin(\varphi)$$

Der Blindfaktor ist das Verhältnis von Blindleistung zu Scheinleistung:

$$\beta = \sin(\varphi) = \frac{Q}{S}$$

21. Verhalten der Grundzweipole 2

i Hinweis

Um die Leistungen voneinander unterscheiden zu können, werden ihre Einheiten etwas umformuliert. Die Basis bildet das Watt (W). Dies bekommt die Wirkleistung, da diese bereits aus der Gleichstromtechnik so bekannt war. Die Scheinleistung wird mit VA (Volt-Ampere) gekennzeichnet und die Blindleistung mit var (Volt-Ampere-Reaktiv). Hier ist auch Groß- und Kleinschreibung zu achten.

Man kann die Leistung auch komplex darstellen:

$$\underline{S} = S \angle \varphi = UI \angle \varphi = P + jQ$$

Um die komplexe Leistung direkt aus dem komplexen Strom und der komplexen Spannung zu berechnen, muss man den konjugiert-komplexen Strom nehmen.

$$\underline{S} = \underline{UI^*} = U \angle \varphi_U \cdot I \angle (-\varphi_I) = UI \angle (\varphi_U - \varphi_I) = UI \angle \varphi = S \angle \varphi = P + jQ$$

21.3.3. Begriffe

Deutsch	aus dem Lateinischen
Scheinwiderstand	Impedanz
Scheinleitwert	Admittanz
Wirkwiderstand	Resistanz
Wirkleitwert	Konduktanz
Blindwiderstand	Reaktanz
Blindleitwert	Suszeptanz
induktiver Blindwiderstand	Induktanz (auch Reaktanz)
kapazitiver Blindwiderstand	Kondensat oder Kapazitanz

21.3.4. Übersichten

Entn. aus [22]

Entn. aus [26]

Entn. aus [26]

21.4. Übungen

21.4.1. Übung 6.1

(Vaske/Fricke Beispiel 3.13)

21.4. Übungen

Tafel 3.28 Eigenschaften passiver Sinusstrom-Zweipole

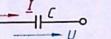
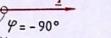
Bezeichnung	Wirkwiderstand R	Induktivität L	Kapazität C	allgemeiner komplexer Sinusstromwiderstand Z
Schaltzeichen				
Zeigerdiagramm				
Grundgesetz	$u = R i$	$u = L di/dt$	$u = \frac{1}{C} \int i dt$	
Ohmsches Gesetz für Beträge komplex	$I = G U = U/R$ $J = G U = U/R$	$I = -B_L U = U/X_L$ $J = j B_L U = U/j X_L$	$I = B_C U = -U/X_C$ $J = j B_C U = U/j X_C$	$I = Y U = U/Z$ $J = Y U = U/Z$
Widerstand komplex	$R = U/I$	$X_L = \omega L = U/I$	$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-U}{I}$	$Z = U/I$
Leitwert komplex	$G = I/U = 1/R$	$j X_L = j \omega L$ $B_L = -1/(j \omega L)$ $j B_L = 1/(j \omega L)$	$j X_C = 1/(j \omega C)$ $B_C = \omega C$ $j B_C = j \omega C$	$Z = U/I = R + j X$ $Y = I/U = 1/Z$ $Y = I/U = 1/Z = G + j B$
Phasenwinkel	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = -90^\circ$	$\varphi = \arctan(Q/P)$
Wirkfaktor	$\cos \varphi = 1$	$\cos \varphi = 0$	$\cos \varphi = 0$	$\cos \varphi = P/S = R/Z = G/Y$
Blindfaktor	$\sin \varphi = 0$	$\sin \varphi = 1$	$\sin \varphi = -1$	$\sin \varphi = Q/S = X/Z = -B/Y$
Wirkleistung	$P = UI$	$P = 0$	$P = 0$	$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi$
Blindleistung	$Q = 0$	$Q = UI$	$Q = -UI$	$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi$

Abbildung 21.5.

An eine Spule mit vernachlässigbar kleinem Wirkwiderstand R wird die Sinusspannung $U = 125 \text{ V}$ mit der Frequenz $f = 40 \text{ Hz}$ gelegt. Der Strommesser zeigt den Sinusstrom $I = 10 \text{ A}$ an. Welche Induktivität L hat die Spule?

Lösung 6.1

$$L = \frac{U}{I\omega} = \frac{125 \text{ V}}{10 \text{ A} \cdot 2\pi \cdot 40 \text{ Hz}} = 49,73 \text{ mH}$$

21.4.2. Übung 6.2

(Vaske/Fricke Beispiel 3.21)

Ein Verbraucher nimmt bei der Sinusspannung $U = 220 \text{ V}$ den Strom $I = 10 \text{ A}$ und die Leistung $P = 1500 \text{ W}$ auf. Wie groß sind Scheinleistung S , Wirkfaktor $\cos(\varphi)$, Blindfaktor $\sin(\varphi)$, Blindleistung Q und Scheinwiderstand Z ?

Lösung 6.2

$$S = UI = 220 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 2200 \text{ VA}$$

$$\lambda = \cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{1500 \text{ W}}{2200 \text{ VA}} = 0,6818$$

$$\varphi = 47,01^\circ$$

21. Verhalten der Grundzweipole 2

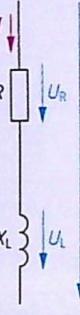
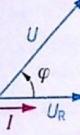
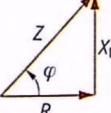
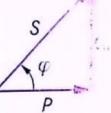
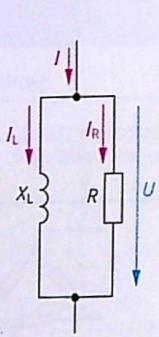
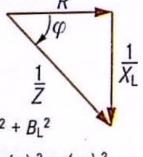
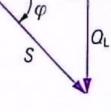
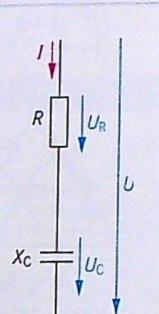
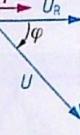
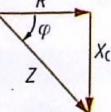
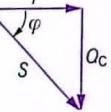
Schaltung	Stromstärke und Spannung	Widerstand und Leitwert	Leistung
	 $I = \frac{U}{R}$ $\varphi = 0^\circ$	$R = \frac{U}{I}$	$P = U \cdot I$ $P = I^2 \cdot R$ $P = \frac{U^2}{R}$
	 $I = \frac{U}{X_L}$ $\varphi = 90^\circ$ induktiv	$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$ $X_L = \omega \cdot L$	$Q_L = U \cdot I$
	 $I = \frac{U}{X_C}$ $\varphi = -90^\circ$ kapazitiv	$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$ $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$Q_C = U \cdot I$
	 $I = \frac{U_R}{R}$ $I = \frac{U_L}{X_L}$ $I = \frac{U}{Z}$ $U^2 = U_R^2 + U_L^2$ $\tan \varphi = \frac{U_L}{U_R}$ $\sin \varphi = \frac{U_L}{U}; \cos \varphi = \frac{U_R}{U}$	 $Z^2 = R^2 + X_L^2$ $\tan \varphi = \frac{X_L}{R}$ $\sin \varphi = \frac{X_L}{Z}; \cos \varphi = \frac{R}{Z}$	 $S^2 = P^2 + Q_L^2$ $\tan \varphi = \frac{Q_L}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q_L}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$
	 $U = I_R \cdot R$ $U = I_L \cdot X_L$ $U = I \cdot Z$ $I^2 = I_R^2 + I_L^2$ $\tan \varphi = \frac{I_L}{I_R}$ $\sin \varphi = \frac{I_L}{I}; \cos \varphi = \frac{I_R}{I}$	 $Y^2 = G^2 + B_L^2$ $\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2$ $\tan \varphi = \frac{R}{X_L}$ $\sin \varphi = \frac{Z}{X_L}; \cos \varphi = \frac{Z}{R}$	 $S^2 = P^2 + Q_L^2$ $\tan \varphi = \frac{Q_L}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q_L}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$
	 $I = \frac{U_R}{R}$ $I = \frac{U_C}{X_C}$ $I = \frac{U}{Z}$ $U^2 = U_R^2 + U_C^2$ $\tan \varphi = \frac{U_C}{U_R}$ $\sin \varphi = \frac{U_C}{U}; \cos \varphi = \frac{U_R}{U}$	 $Z^2 = R^2 + X_C^2$ $\tan \varphi = \frac{X_C}{R}$ $\sin \varphi = \frac{X_C}{Z}; \cos \varphi = \frac{R}{Z}$	 $S^2 = P^2 + Q_C^2$ $\tan \varphi = \frac{Q_C}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q_C}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$

Abbildung 21.6.

21.4. Übungen

Schaltung	Stromstärke und Spannung	Widerstand und Leitwert	Leistung			
	$I_R = \frac{U}{R}$ $I_C = \frac{U}{X_C}$ $I = \frac{U}{Z}$ $I^2 = I_R^2 + I_C^2$ $\tan \varphi = \frac{I_C}{I_R}; \cos \varphi = \frac{I_R}{I}$ $\sin \varphi = \frac{I_C}{I}$	 $Y^2 = G^2 + B_C^2$ $\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2$ $\tan \varphi = \frac{R}{X_C}; \cos \varphi = \frac{Z}{R}$ $\sin \varphi = \frac{Z}{X_C}$	 $P = I_R \cdot U$ $Q_C = I_C \cdot U$ $S = I \cdot U$ $S^2 = P^2 + Q_C^2$ $\tan \varphi = \frac{Q_C}{P}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$ $\sin \varphi = \frac{Q_C}{S}$			
	$U_L > U_C$	$U_L < U_C$	$X_L > X_C$	$X_L < X_C$	$Q_L > Q_C$	$Q_L < Q_C$
	$U^2 = U_R^2 + U^*^2$ $\tan \varphi = \frac{U^*}{U_R}$ $\sin \varphi = \frac{U^*}{U}; \cos \varphi = \frac{U_R}{U}$	$Z^2 = R^2 + X^*^2$ $\tan \varphi = \frac{X^*}{R}$ $\sin \varphi = \frac{X^*}{Z}; \cos \varphi = \frac{R}{Z}$	$S^2 = P^2 + Q^*^2$ $\tan \varphi = \frac{Q^*}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q^*}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$			
	$I_C > I_L$	$I_L < I_C$	$X_C < X_L$	$X_C > X_L$	$Q_C > Q_L$	$Q_C < Q_L$
	$I^2 = I_R^2 + I^*^2$ $\tan \varphi = \frac{I^*}{I_R}$ $\sin \varphi = \frac{I^*}{I}; \cos \varphi = \frac{I_R}{I}$	$Y^2 = G^2 + B^*^2$ $\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X^*}\right)^2$ $\tan \varphi = \frac{R}{X^*}; \cos \varphi = \frac{Z}{R}$	$S^2 = P^2 + Q^*^2$ $\tan \varphi = \frac{Q^*}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q^*}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$			

Abbildung 21.7.

21. Verhalten der Grundzweipole 2

$$\sin(|\varphi|) = 0,7315$$

$$|Q| = S \cdot \sin(|\varphi|) = 2200 \text{ VA} \cdot 0,7315 = 1609,3 \text{ var}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220 \text{ V}}{10 \text{ A}} = 22 \Omega$$

21.4.3. Übung 6.3

Albach/Fischer Aufgabensammlung Kap. 8.1, 4. Aufgabe, [24]

Das in der Abbildung gezeigte Netzwerk wird von einer harmonischen Spannung $\hat{u}_0 = \hat{u}_0 e^{j0}$ erregt. Zeichnen Sie je ein Ersatzschaltbild des gezeigten Netzwerks für $f- > 0 \text{ Hz}$ und $f- > \infty \text{ Hz}$ und berechnen Sie für beide Fälle den Strom \hat{i}_R durch den Widerstand R in Abhängigkeit von der Quellenspannung \hat{u}_0 .

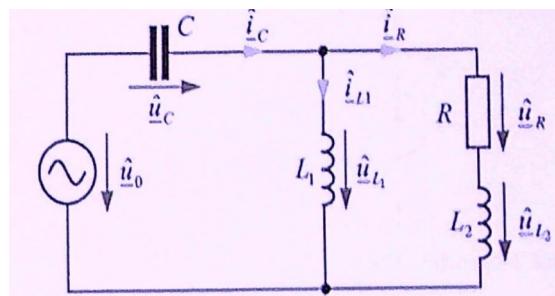


Abbildung 21.8.

Entn. aus [24]

Lösung 6.3

Ersatzschaltbilder für $f \rightarrow 0 \text{ Hz}$ links und $f \rightarrow \infty \text{ rechts}$:

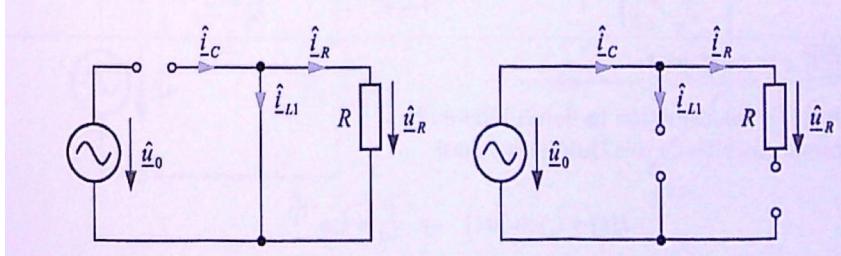


Abbildung 21.9.

Entn. aus [24]

In beiden Grenzfällen gilt $\hat{i}_R = 0$.

21.4.4. Übung 6.4

(Albach/Fischer Aufgabensammlung 8.1 8. Aufgabe)

Zu welchem der folgenden Netzwerke a bis c gehört das dargestellte Zeigerdiagramm?

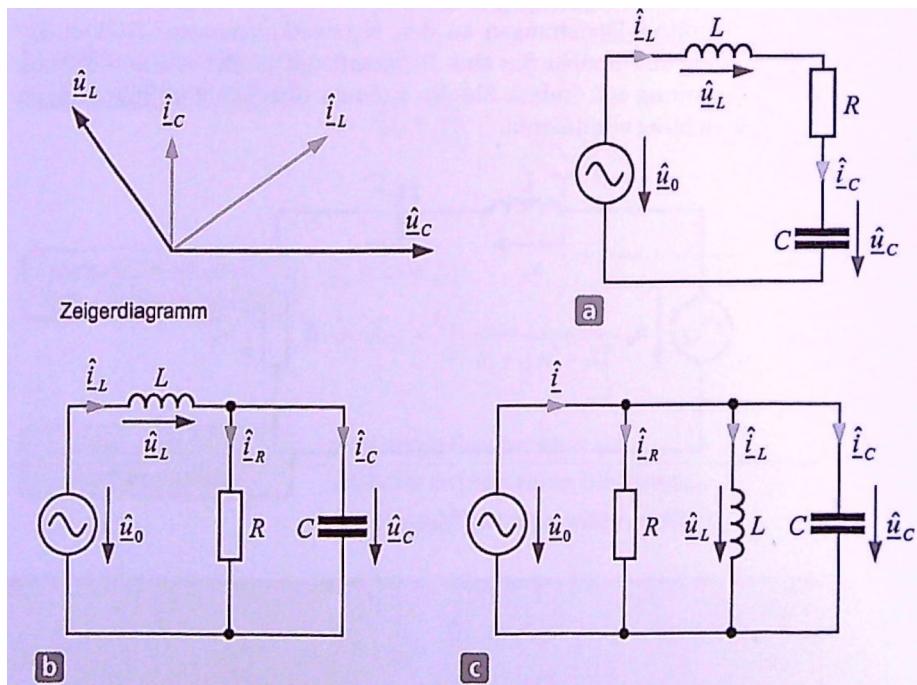


Abbildung 21.10.

Entn. aus [24]

Lösung 6.4

In der Reihenschaltung in Abb. a gilt $\hat{i}_L = \hat{i}_C$ und bei der Parallelschaltung in Abb. c gilt $\hat{u}_L = \hat{u}_C$. Daher kann das Zeigerdiagramm nur zur Schaltung b gehören.

Hier ist der Strom \hat{i}_R in Phase zur Kondensatorspannung. Wegen $\hat{i}_L = \hat{i}_R + \hat{i}_C$ muss der Spulenstrom der Kondensatorspannung voreilen, dem Kondensatorstrom aber in Übereinstimmung mit dem Zeigerdiagramm nacheilen.

21.4.5. Übung 6.5

(Hagmann Aufgabe 6.8)

Eine Spule mit der Induktivität $L = 175 \text{ mH}$ ist mit einem ohmschen Widerstand von $R = 40 \Omega$ in Reihe geschaltet. Die Anordnung liegt nach Bild 6.8a an einer (sinusförmigen) Wechselspannung mit dem Effektivwert $U = 230 \text{ V}$ der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$.

- a) Wie groß ist der Effektivwert I des fließenden Stromes?

21. Verhalten der Grundzweipole 2

- b) Welcher Phasenverschiebungswinkel φ besteht zwischen der Spannung \underline{U} und dem Strom \underline{I} ?

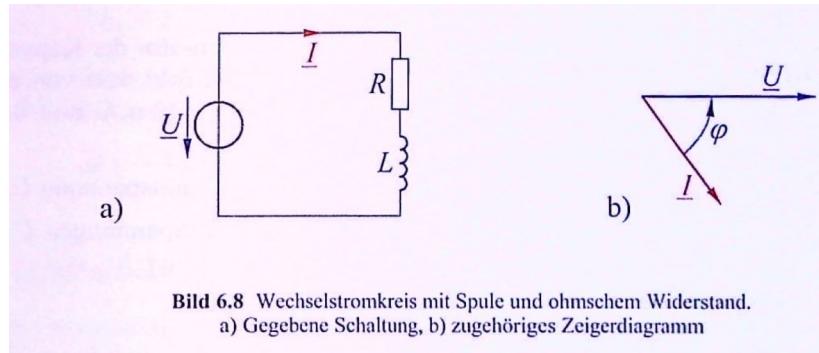


Abbildung 21.11.

Entn. aus [25]

Lösung 6.5

Blindwiderstand der Spule:

$$\omega L = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 175 \text{ mH} = 54,98 \Omega$$

Impedanz der Schaltung (komplex):

$$\underline{Z} = R + j\omega L = (40 + j54,98) \Omega = 68\Omega \angle 54^\circ$$

\underline{U} als Bezugssgröße und reell:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{230 \text{ V}}{68\Omega \angle 54^\circ} = 3,38 \text{ A} \angle (-54^\circ)$$

21.4.6. Übung 6.6

(Hagmann Aufgabe 6.12)

Ein ohmscher Widerstand von $R = 100 \Omega$ und eine Spule mit der Induktivität $L = 72 \text{ mH}$ liegen nach Bild 6.12a parallel an einer Spannungsquelle, die eine Spannung von $U = 36 \text{ V}$ der Frequenz $f = 400 \text{ Hz}$ liefert.

- a) Es sind die Teilströme I_R und I_L sowie der Gesamtstrom I zu bestimmen.
- b) Um welchen Phasenwinkel φ eilt der Strom \underline{I} der Spannung \underline{U} nach?

Entn. aus [25]

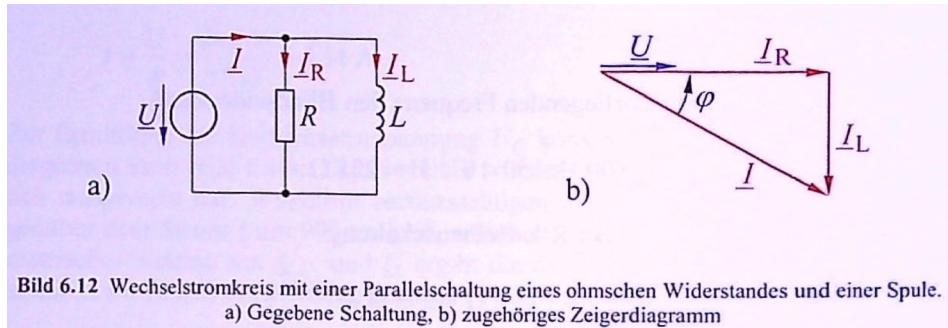


Bild 6.12 Wechselstromkreis mit einer Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes und einer Spule.
a) Gegebene Schaltung, b) zugehöriges Zeigerdiagramm

Abbildung 21.12.

Lösung 6.6

Blindwiderstand:

$$\omega L = 2\pi \cdot 400 \text{ Hz} \cdot 72 \text{ mH} = 181 \Omega$$

\underline{U} als Bezugsgroße und reell:

$$I_R = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{36 \text{ V}}{100 \Omega} = 360 \text{ mA}$$

$$I_L = \frac{\underline{U}}{j\omega L} = \frac{36 \text{ V}}{j181 \Omega} = -j199 \text{ mA}$$

$$\underline{I} = I_R + I_L = (360 - j199) \text{ mA} = 411 \text{ mA} \angle (-28, 9^\circ)$$

21.4.7. Übung 6.7

(Hagmann Aufgabe 6.13)

Ein ohmscher Widerstand von $R_1 = 80 \Omega$ ist nach Bild 6.13a mit einer Spule in Reihe geschaltet, die die Induktivität $L_1 = 12 \text{ mH}$ besitzt. Die Reihenschaltung soll für die Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$ durch die in Bild 6.13b dargestellte Parallelschaltung ersetzt werden.

Welche Werte sind für den Widerstand R_2 und die Induktivität L_2 erforderlich?

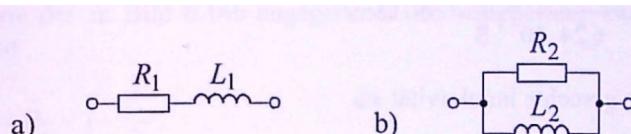


Bild 6.13 Umwandlung einer R-L-Reihenschaltung in eine elektrisch gleichwertige Parallelschaltung

Abbildung 21.13.

Entn. aus [25]

 Lösung 6.7

Blindwiderstand Spule (Reihe):

$$\omega L_1 = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot 12 \text{ mH} = 75,4 \Omega$$

Impedanz der Reihenschaltung:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = (80 + j75,4) \Omega$$

Admittanz:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{(80 + j75,4) \Omega} = (6,62 - j6,24) \text{ mS}$$

Admittanz der Parallelschaltung:

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} - j\frac{1}{\omega L_2}$$

Gleichsetzen:

$$\frac{1}{R_2} - j\frac{1}{\omega L_2} = (6,62 - j6,24) \text{ mS}$$

Wirkwiderstand (Parallel):

$$R_2 = \frac{1}{6,62 \text{ mS}} = 151 \Omega$$

Blindwiderstand (Parallel):

$$\omega L_2 = \frac{1}{6,24 \text{ mS}} = 160 \Omega$$

Induktivität (Parallel):

$$L_2 = \frac{X_{L,2}}{\omega} = \frac{160 \Omega}{2\pi \cdot 1 \text{ kHz}} = 25,5 \text{ mH}$$

22. Komplexe Wechselstromrechnung

- Komplexer Spannungs- und Stromteiler
- Brückenschaltung
- Anpassung
- Überlagerungsverfahren
- Maschenstromverfahren
- Knotenpotentialverfahren

22.1. Komplexer Spannungs- und Stromteiler

Der Spannungs- und Stromteiler ist bereits aus GEL1 bekannt. Unter Anwendung der komplexen Zahlen können diese Konzepte auf den Sinusstrom übertragen werden.

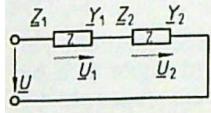
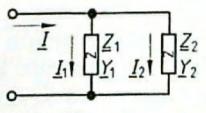
Spannungsteiler	Stromteiler
 $\frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Y_2}{Y_1}$ $\frac{U_1}{U} = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} = \frac{Y_2}{Y_1+Y_2} = \frac{1}{1+(Z_2/Z_1)}$	 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$ $\frac{I_1}{I} = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{1}{1+(Z_1/Z_2)}$

Abbildung 22.1.

Entn. aus [22]

22.2. Leistungsanpassung

Bei der Leistungsanpassung soll der Empfänger die größtmögliche Leistung übertragen bekommen.



Abbildung 22.2.

22. Komplexe Wechselstromrechnung

Entn. aus [22]

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*$$

$$\underline{Y}_a = \underline{Y}_i^*$$

22.3. Brückenschaltung

Bei der Brückenschaltung spricht man von abgeglichen, wenn im Diagonalzweig keine Spannung anliegt. Damit das geschieht, müssen die Impedanzen in den Zweigen der Brückenschaltung die gleichen Verhältnisse aufweisen.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$$

Oder aufgeteilt in Betrag und Phase:

$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

22.4. Blindleistungskompensation

Da eine Induktivität positive Blindleistung aufnimmt und eine Kapazität negative Blindleistung, kann man die Zweipole so zusammenschalten, dass sich die Blindleistungen gegenseitig ausgleichen. Damit werden die Zuleitungen durch weniger Blindleistung belastet. Dieses Vorgehen nennt man Blindleistungskompensation.

Entn. aus [26]

22.4. Blindleistungskompensation

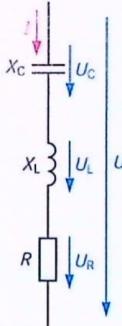
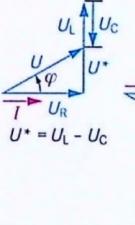
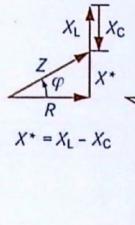
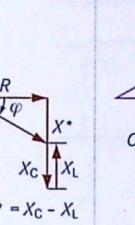
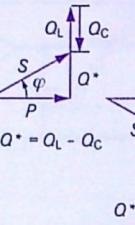
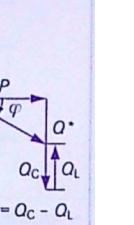
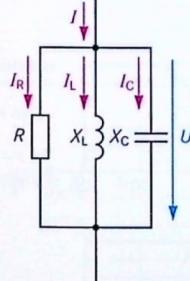
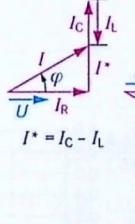
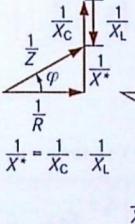
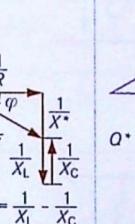
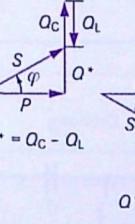
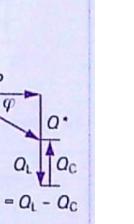
$U_L > U_C$	$U_L < U_C$	$X_L > X_C$	$X_L < X_C$	$Q_L > Q_C$	$Q_L < Q_C$
	 $U^* = U_L - U_C$ $U^* = U_C - U_L$ $U^2 = U_R^2 + U^*^2$ $\tan \varphi = \frac{U^*}{U_R}$ $\sin \varphi = \frac{U^*}{U}; \cos \varphi = \frac{U_R}{U}$	 $X^* = X_L - X_C$ $Z^2 = R^2 + X^*^2$ $\tan \varphi = \frac{X^*}{R}$ $\sin \varphi = \frac{X^*}{Z}; \cos \varphi = \frac{R}{Z}$	 $X^* = X_C - X_L$ $Z^2 = R^2 + X^*^2$ $\tan \varphi = \frac{X^*}{R}$ $\sin \varphi = \frac{X^*}{Z}; \cos \varphi = \frac{R}{Z}$	 $Q^* = Q_L - Q_C$ $S^2 = P^2 + Q^*^2$ $\tan \varphi = \frac{Q^*}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q^*}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$	 $Q^* = Q_C - Q_L$ $S^2 = P^2 + Q^*^2$ $\tan \varphi = \frac{Q^*}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q^*}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$
$I_C > I_L$	$I_C < I_L$	$X_C < X_L$	$X_C > X_L$	$Q_C > Q_L$	$Q_C < Q_L$
	 $I^* = I_C - I_L$ $I^* = I_L - I_C$ $I^2 = I_R^2 + I^*^2$ $\tan \varphi = \frac{I^*}{I_R}$ $\sin \varphi = \frac{I^*}{I}; \cos \varphi = \frac{I_R}{I}$	 $\frac{1}{X^*} = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}$ $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \frac{1}{X^*}$ $\frac{1}{X^*} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}$ $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \frac{1}{X^*}$ $\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X^*}\right)^2$ $\tan \varphi = \frac{R}{X^*}$ $\sin \varphi = \frac{Z}{X^*}; \cos \varphi = \frac{R}{Z}$	 $\frac{1}{X^*} = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}$ $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \frac{1}{X^*}$ $\frac{1}{X^*} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}$ $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \frac{1}{X^*}$ $\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X^*}\right)^2$ $\tan \varphi = \frac{R}{X^*}$ $\sin \varphi = \frac{Z}{X^*}; \cos \varphi = \frac{R}{Z}$	 $Q^* = Q_C - Q_L$ $S^2 = P^2 + Q^*^2$ $\tan \varphi = \frac{Q^*}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q^*}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$	 $Q^* = Q_L - Q_C$ $S^2 = P^2 + Q^*^2$ $\tan \varphi = \frac{Q^*}{P}$ $\sin \varphi = \frac{Q^*}{S}; \cos \varphi = \frac{P}{S}$

Abbildung 22.3.

22.5. Überlagerungsprinzip

Das Überlagerungsprinzip darf **nur** in linearen Netzwerken benutzt werden.

Bei Sinusstrom gilt Linearität bei den komplexen Effektivwerten \underline{U} und \underline{I} , sowie bei den komplexen Scheitelwerten $\hat{\underline{u}}$ und $\hat{\underline{i}}$.

Bei dem Überlagerungsprinzip berechnet man das Netzwerk für jede Quelle einzeln. Spannungsquellen werden kurzgeschlossen und Stromquellen werden abgetrennt. Nach Berechnung z.B. aller Teilströme für alle einzeln wirksamen Quellen, wird aus allen Teilströmen der Gesamtstrom berechnet.

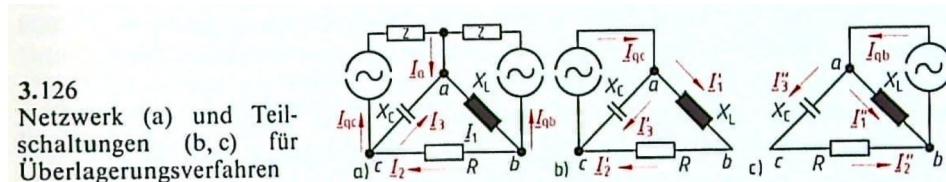


Abbildung 22.4.

Entn. aus [22]

22.6. Maschenstromverfahren

Das Maschenstromverfahren kann auf Sinusstromnetzwerke angewendet werden, indem man die reellen Gleichstromgrößen durch die komplexen Größen \underline{U} , \underline{I} und \underline{Z} ersetzt.

Zusammenfassung des Maschenstromverfahrens:

Vorbereitung:

- Vereinfachung des Netzwerkes als Graphen
- Einzeichnen des vollständigen Baumes (Verbindung aller Knoten ohne Maschen/Schleifen zu erzeugen)
 - alle Zweige des Baumes sind Baumzweige/Verbindungswege -> Maschenströme

Maschenumläufe:

- $m = z - k + 1$ Maschengleichungen (= Anzahl Verbindungswege)
 - m: Anzahl Maschengleichungen
 - z: Anzahl Zweige insgesamt
 - k: Anzahl Knoten insgesamt
- Maschenumläufe einzeichnen (jeder Verbindungsweig nur **1-mal** durchlaufen; der Umlaufsinn entspricht der Flussrichtung der Maschenströme)
- Maschengleichungen aufstellen

Knotengleichungen:

- $r = k - 1$ Anzahl Knotengleichungen
- Knotengleichungen nach Baumzweigen umstellen

Kombinieren:

- Knotengleichungen im Maschengleichungen einsetzen
- Maschenströme als Spalte; Quellspannungen nach rechts
- Impedanzmatrix aufstellen

Kontrolle:

- Hauptdiagonale: Umlaufimpedanzen
- Koppelimpedanzen: gehören zu mehr als einer Maschen \rightarrow negatives Vorzeichen, wenn Umlaufrichtungen entgegengesetzt sind
- Quellspannungen: sind positiv wenn sie entgegen des Maschenumlaufsinns sind
- Symmetrie:
 - Maschenumlaufsinne entsprechend Maschenströme
 - Spalten und Zeilen richtig sortiert

Sonderfälle:

- reale Stromquelle:
 - Umwandlung in reale Spannungsquelle
 - Stromzweig muss nachträglich berechnet werden
- ideale Stromquelle:
 - Stromzweig als Maschenstrom
 - nur 1 Maschenumlauf über den Zweig q

22.7. Knotenpotentialverfahren

Das Knotenpotentialverfahren kann auf Sinusstromnetzwerke angewendet werden, indem man die reellen Gleichstromgrößen durch die komplexen Größen \underline{U} , \underline{I} und \underline{Z} bzw. \underline{Y} ersetzt.

Zusammenfassung des Knotenpotentialverfahrens:

- willkürlich Ströme ins Netzwerk einzeichnen
- Impedanzen in Admittanzen umwandeln
- Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln (bewirkt eine Änderung der Anzahl an Strömen im Netzwerk)
- Null-Bezugspotential $\varphi_0 = 0$ festlegen
- restlichen Knoten nummerieren
- Knotenpotentiale einzeichnen + restliche Spannungen (in Stromrichtung einzeichnen)
- Knotengleichungen aufstellen
- Ströme als Produkt aus Spannung · Leitwert darstellen
- Spannungen aus Knotenpotentialen darstellen
- Spannungen in Knotengleichung einsetzen (Gleichungen bestehen aus Leitwerten und Knotenpotentialen)

22. Komplexe Wechselstromrechnung

- invertieren, umstellen, sortieren
- Admittanzmatrix aufstellen

Shortcut:

- Matrix ist symmetrisch um die Hauptdiagonale
- HD sind Knotenadmittanzen
- andere Admittanzen sind Koppeladmittanzen (die zwischen 2 Knoten sitzen); sie sind **immer** negativ
- Stromvektor besteht aus Quellströmen (auf Knoten zu -> positiv; von Knoten weg -> negativ)

22.8. Übungen

22.8.1. Übung 7.1 (Zusammenfassung komplexer Impedanzen)

(Albach Kapitel 8 Level 2 Aufgabe 8.8)

Gegeben ist das folgende Netzwerk.

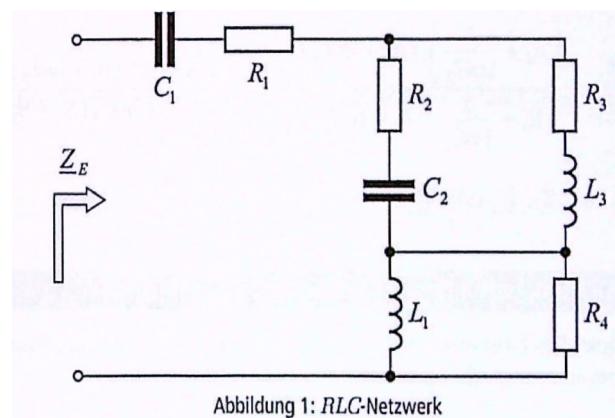


Abbildung 1: RLC-Netzwerk

Abbildung 22.5.

Entn. aus [24]

Bestimmen Sie die Eingangsimpedanz Z_E für das gegebene Netzwerk, indem Sie nacheinander geeignete Teilnetzwerke zusammenfassen und entsprechende Abkürzungen einführen.

Lösung 7.1

Reihenschaltung von R_1 und C_1 :

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

Reihenschaltung von R_2 und C_2 :

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}$$

Reihenschaltung von R_3 und L_3 :

$$Z_3 = R_3 + j\omega L_3$$

Parallelschaltung von L_1 und R_4 :

$$Z_4 = \frac{R_4 \cdot j\omega L}{R_4 + j\omega L}$$

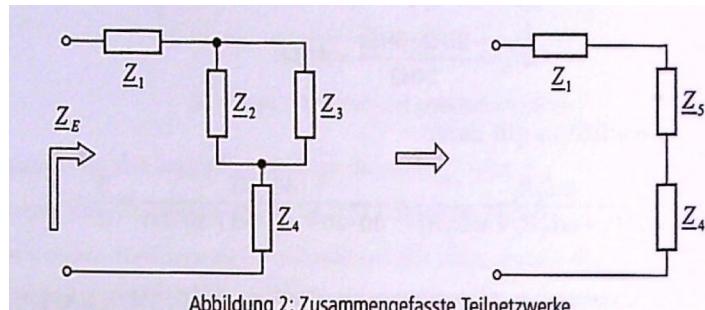


Abbildung 22.6.

Entn. aus [24]

Parallelschaltung von Z_2 und Z_3 :

$$Z_5 = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) \cdot (R_3 + j\omega L_3)}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_3 + j\omega L_3} = \frac{(1 + j\omega C_2 R_2) \cdot (R_3 + j\omega L_3)}{1 - \omega^2 C_2 L_3 + j\omega C_2 (R_2 + R_3)}$$

Reihenschaltung von Z_1 , Z_5 und Z_4 :

$$Z_E = Z_1 + Z_5 + Z_4$$

22.8.2. Übung 7.2 (Netzwerkberechnung)

(Hagmann Aufgabe 7.4)

Die im Bild angegebene Schaltung enthält die ohmschen Widerstände $R_1 = 150 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ und $R_3 = 350 \Omega$. Die beiden vorhandenen Spulen haben die Induktivitäten $L_1 = 10 \text{ mH}$ und $L_2 = 30 \text{ mH}$. Der Kondensator besitzt die Kapazität $C = 1 \mu\text{F}$. Die Schaltung liegt an der Spannung $U = 40 \text{ V}$ der Frequenz $f = 1,2 \text{ kHz}$.

Es sind alle auftretenden Ströme zu berechnen.

Entn. aus [25]

22. Komplexe Wechselstromrechnung

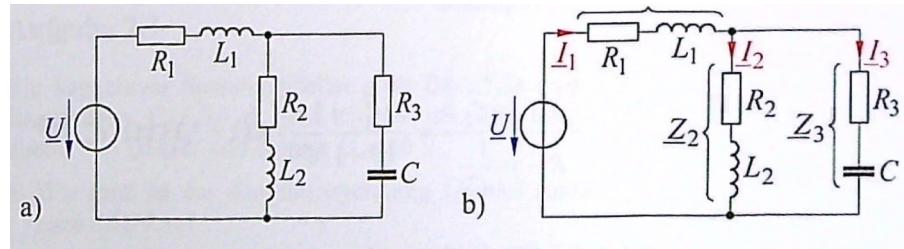


Bild 7.4 Belastung einer Spannungsquelle durch eine RLC-Widerstandskombination. a) Gegebene Schaltung, b) Schaltung mit eingetragenen Strömen und gekennzeichneten Impedanzen

Abbildung 22.7.

Lösung 7.2

Berechnung der Blindwiderstände:

$$\omega L_1 = 2\pi \cdot 1,2 \text{ kHz} \cdot 10 \text{ mH} = 75,4 \Omega$$

$$\omega L_2 = 2\pi \cdot 1,2 \text{ kHz} \cdot 30 \text{ mH} = 226 \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1,2 \text{ kHz} \cdot 1 \mu F} = 133 \Omega$$

Berechnung der Impedanzen:

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = (200 + j226) \Omega$$

$$Z_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C} = (350 - j133) \Omega$$

Parallelschaltung von Z_2 und Z_3 :

$$Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(200 + j226) \cdot (350 - j133)}{(200 + j226) + (350 - j133)} \Omega = 203 \Omega \angle 18,1^\circ$$

Mit Spannung U als Bezugsgröße und reell:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1 + Z_{23}} = \frac{40 \text{ V}}{(150 + j75,4 + 203 \angle 18,1^\circ) \Omega} = 108 \text{ mA} \angle -22^\circ$$

Stromteiler:

$$I_2 = I_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 108 \text{ mA} \angle -22^\circ \frac{(350 - j133) \Omega}{(200 + j226 + 350 - j133) \Omega} = 73 \text{ mA} \angle -52,4^\circ$$

Knotenregel:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 108 \text{ mA} \angle -22^\circ - 73 \text{ mA} \angle -52,4^\circ = 59 \text{ mA} \angle 16,9^\circ$$

22.8.3. Übung 7.3 (Leistungsanpassung)

(Hagman Aufgabe 7.31)

Die im Bild dargestellte Schaltung enthält eine Spannungsquelle mit dem (ohmschen) Innenwiderstand $R_i = 100 \Omega$. Die Frequenz der gelieferten Spannung beträgt $f = 100 \text{ Hz}$. Ein ohmscher Belastungswiderstand (Verbraucherviderstand) $R_a = 10 \Omega$ soll wie dargestellt über eine LC-Kombination an die Spannungsquelle angeschlossen werden. Dabei sollen die Induktivität L und die Kapazität C so gewählt werden, dass Wirkleistungsanpassung besteht, R_a also die maximal mögliche Wirkleistung aufnimmt.

Welche Werte sind für L und C erforderlich?

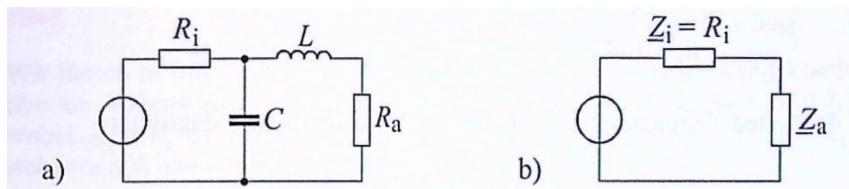


Bild 7.31 Anpassung eines Belastungswiderstandes (R_a) an den Innenwiderstand (R_i) einer Spannungsquelle. a) Gegebene Schaltung, b) elektrisch gleichwertige Ersatzschaltung

Abbildung 22.8.

Entn. aus [25]

Lösung 7.3

Zusammenfassen der RLC-Kombination:

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a} = j\omega C + \frac{1}{R_a + j\omega L} = j\omega C + \frac{1}{R_a + j\omega L} \cdot \frac{R_a - j\omega L}{R_a - j\omega L} = j\omega C + \frac{R_a}{R_a^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R_a^2 + (\omega L)^2}$$

Für Wirkleistungsanpassung gilt: $\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*$

$$\underline{Z}_i^* = R_i = \underline{Z}_i$$

$$\underline{Z}_a = R_i$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \underline{Y}_a = j\omega C + \frac{R_a}{R_a^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R_a^2 + (\omega L)^2}$$

Trennung Real- und Imaginärteil:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{R_a}{R_a^2 + (\omega L)^2}$$

$$j\omega C - j \frac{\omega L}{R_a^2 + (\omega L)^2} = 0$$

1. Gleichung Induktivität:

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{R_i R_a - R_a^2} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \text{ Hz}} \cdot \sqrt{100 \cdot 10 - 10^2} \Omega = 47,7 \text{ mH}$$

2. Gleichung Kapazität:

$$C = \frac{L}{R_a^2 + (\omega L)^2} = \frac{47,7 \text{ mH}}{(10 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 47,7 \text{ mH})^2} = 47,7 \mu\text{F}$$

22.8.4. Übung 7.4 (Brückenschaltung)

(Weißgerber Aufgabenblatt 3 Aufgabe 2)

Das Ersatzschaltbild der unbekannten Spule soll die Parallelschaltung von R_{p3} und L_{p3} sein.

- a) Ermitteln Sie aus der allgemeinen Abgleichbedingung für Wechselstrombrücken die Formeln für R_{p3} und L_{p3} .
- b) Bei einer Frequenz von $f = 50 \text{ Hz}$ ergeben sich bei Abgleich folgende Werte: $R_1 = 144 \Omega$, $R_{r2} = 284 \Omega$, $C_{r2} = 10,6 \mu\text{F}$, $R_4 = 50 \Omega$. Errechnen Sie R_{p3} und L_{p3} .

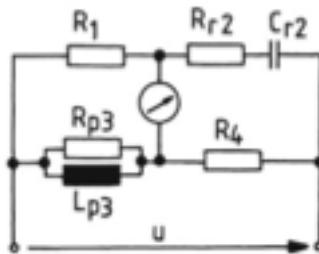


Abbildung 22.9.

Entn. aus [27]

🔥 Lösung 7.4

a:

allgemeine Abgleichbedingung für Wechselstrombrücken:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

wegen Parallelschaltung der Ohmschen und Induktiven Widerstand wird der komplexe Leitwert gesucht:

$$\frac{1}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4}$$

$$\frac{1}{R_{p3}} - j \frac{1}{\omega L_{p3}} = \frac{1}{R_1 \cdot R_4} \cdot \left(R_{r2} - j \frac{1}{\omega C_{r2}} \right)$$

ausmultiplizieren:

$$\frac{1}{R_{p3}} - j \frac{1}{\omega L_{p3}} = \frac{R_{r2}}{R_1 \cdot R_4} - j \frac{1}{\omega \cdot R_1 \cdot R_4 \cdot C_{r2}}$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile:

$$R_{p3} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_{r2}}$$

$$L_{p3} = R_1 \cdot R_4 \cdot C_{r2}$$

b:

$$R_{p3} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_{r2}} = \frac{144 \Omega \cdot 50 \Omega}{284 \Omega} = 25,35 \Omega$$

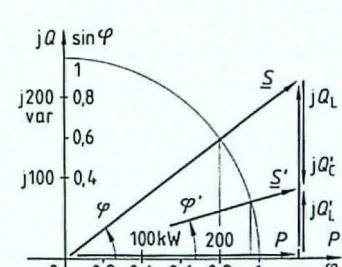
$$L_{p3} = R_1 \cdot R_4 \cdot C_{r2} = 144 \Omega \cdot 50 \Omega \cdot 10,6 \mu F = 76,32 mH$$

22.8.5. Übung 7.5 (Blindleistungskompensation)

(Vaske/Fricke Beispiel 3.103)

Ein Verbraucher entnimmt einem Netz für die Sinusspannung $U = 20 kV$ bei der Frequenz $f = 50 Hz$ die Wirkleistung $P = 300 kW$ bei dem induktiven Wirkfaktor $\cos(\varphi) = 0,8$. Der Wirkfaktor soll auf $\cos(\varphi') = 0,95$ verbessert werden. Die erforderliche Kapazität C soll bestimmt werden.

Lösung 7.5



3.139 Blindstromkompensation

Abbildung 22.10.

22. Komplexe Wechselstromrechnung

Entn. aus [22]

Berechnung Scheinleistung:

$$S = \frac{P}{\cos(\varphi)} = \frac{300 \text{ kW}}{0,8} = 375 \text{ kVA}$$

Scheinleistung nach Kompensation:

$$S' = \frac{P}{\cos(\varphi')} = \frac{300 \text{ kW}}{0,95} = 315,8 \text{ kVA}$$

Phasenwinkel berechnen:

$$\varphi = \arccos(0,8) = 36,87^\circ$$

$$\varphi' = \arccos(0.95) = 18,19^\circ$$

ursprüngliche induktive Blindleistung:

$$Q_L = S \cdot \sin(\varphi) = 375 \text{ kVA} \cdot \sin(36,87^\circ) = 225 \text{ kvar}$$

induktive Blindleistung nach Kompensation:

$$Q'_L = S' \cdot \sin(\varphi') = 315,8 \text{ kVA} \cdot \sin(18,19^\circ) = 98,58 \text{ kvar}$$

kapazitive Blindleistung:

$$|Q_C| = Q_L - Q'_L = 225 \text{ kvar} - 98,58 \text{ kvar} = 126,42 \text{ kvar}$$

Kapazität berechnen:

$$C = \frac{|Q_C|}{\omega U^2} = \frac{126,42 \text{ kvar}}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot (20 \text{ kV})^2} = 1,006 \mu\text{F}$$

22.8.6. Übung 7.6 (Maschenstromverfahren)

(Hagmann Aufgabe 7.27)

In der Schaltung haben die ohmschen Widerstände die Werte $R_1 = 85 \Omega$, $R_2 = 35 \Omega$ und $R_3 = 75 \Omega$. Die Induktivitäten der Spulen betragen $L_1 = 21,22 \text{ mH}$ und $L_2 = 50,4 \text{ mH}$. Der vorhandene Kondensator besitzt die Kapazität $C = 17,68 \mu\text{F}$. Die Versorgungsspannung hat eine Frequenz von $f = 300 \text{ Hz}$ und beträgt $U = 100 \text{ V}$.

Die Widerstandsmatrix soll über das Maschenstromverfahren aufgestellt werden.

Entn. aus [25]

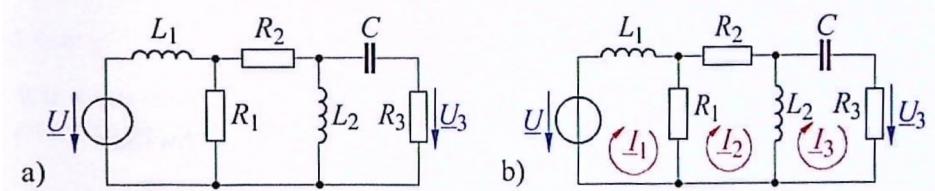


Bild 7.27 Beispiel eines Wechselstromnetzwerkes. a) Gegebene Schaltung,
b) Schaltung mit eingetragenen Maschenströmen

Abbildung 22.11.

🔥 Lösung 7.6

Berechnung der Blindwiderstände:

$$\omega L_1 = 2\pi \cdot 300 \text{ Hz} \cdot 21,22 \text{ mH} = 40 \Omega$$

$$\omega L_2 = 2\pi \cdot 300 \text{ Hz} \cdot 50,4 \text{ mH} = 95 \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 300 \text{ Hz} \cdot 17,68 \mu F} = 30 \Omega$$

Maschenströme: \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3

Maschengleichungen:

M1:

$$-\underline{U} + \underline{I}_1 j \omega L_1 + (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) R_1 = 0$$

M2:

$$(\underline{I}_2 - \underline{I}_1) R_1 + \underline{I}_2 R_2 + (\underline{I}_2 - \underline{I}_3) j \omega L_2 = 0$$

M3:

$$(\underline{I}_3 - \underline{I}_2) j \omega L_2 + \underline{I}_3 \left(R_3 - j \frac{1}{\omega C} \right) = 0$$

nach unbekannten Strömen ordnen:

M1:

$$\underline{I}_1 (R_1 + j \omega L_1) - \underline{I}_2 R_1 = \underline{U}$$

M2:

$$-\underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_2 (R_1 + R_2 + j \omega L_2) - \underline{I}_3 j \omega L_2 = 0$$

M3:

$$-\underline{I}_2 j \omega L_2 + \underline{I}_3 \left(R_3 + j \omega L_2 - j \frac{1}{\omega C} \right) = 0$$

Matrix aufstellen:

$$\begin{bmatrix} (85 + j40) & -85 & 0 \\ -85 & (120 + j95) & -j95 \\ 0 & -j95 & (75 + j65) \end{bmatrix} \Omega \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V \quad (22.1)$$

22.8.7. Übung 7.7 (Überlagerungsverfahren)

(Vaske/Fricke Beispiel 3.92)

Das Netzwerk im Bild besteht aus Wirkwiderstand $R = 5 \Omega$, den Blindwiderständen $X_L = 10 \Omega$ und $X_C = -20 \Omega$, sowie den komplexen Widerständen $Z_b = 100 \Omega \angle -30^\circ$ und $Z_c = 50 \Omega \angle 50^\circ$ und führt die Ströme $I_{qb} = -j4 A$ und $I_{qc} = 3 A$.

Es sollen alle Ströme berechnet werden.

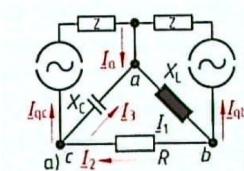


Abbildung 22.12.

Entn. aus [22]

Lösung 7.7

3.126
Netzwerk (a) und Teilschaltungen (b, c) für Überlagerungsverfahren

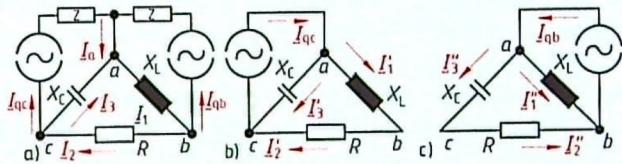


Abbildung 22.13.

Entn. aus [22]

1. Teilschaltung (im Bild: b):

Stromteiler:

$$I'_1 = I'_2 = I_{qc} \frac{jX_C}{R + jX_L + jX_C} = 3 A \frac{-j20 \Omega}{5 \Omega + j10 \Omega - j20 \Omega} = 5,37 A \angle -26,57^\circ$$

Knotenregel:

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}_{qc} - \underline{I}'_1 = 3A \angle 126,89^\circ$$

2. Teilschaltung (im Bild: c):

Stromteiler:

$$\underline{I}''_2 = \underline{I}''_3 = I_{qb} \frac{jX_L}{R + jX_L + jX_C} = -j4A \frac{j10\Omega}{5\Omega + j10\Omega - j20\Omega} = 3,578A \angle 63,43^\circ$$

Knotenregel:

$$\underline{I}''_1 = \underline{I}_{qb} - \underline{I}''_2 = 7,38A \angle -102,53^\circ$$

Überlagerung der Ströme:

$$I_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1 = 5,37A \angle -26,57^\circ + 7,38A \angle -102,53^\circ = 10,13A \angle -71,57^\circ$$

$$I_2 = \underline{I}'_2 - \underline{I}''_2 = 5,37A \angle -26,57^\circ - 3,578A \angle 63,43^\circ = 6,45A \angle -60,25^\circ$$

$$I_3 = \underline{I}'_3 + \underline{I}''_3 = -3A \angle 126,89^\circ - 3,578A \angle 63,43^\circ = 5,6A \angle -87,95^\circ$$

23. Filterschaltungen, Bode-Diagramme und Ortskurven

- Bode-Diagramm
- Ortskurven
- Tief- und Hochpass

23.1. Frequenzgang

In Netzwerken mit den Bauteilen Wirkwiderstand R, Induktivität L und Kapazität C ist das Verhalten bei verschiedenen Frequenzen interessant. Zwei Varianten sich den Frequenzgang eines Netzwerks anzuschauen, ist das Bode-Diagramm und die Ortskurve.

23.1.1. Bode-Diagramm

In dem Bode-Diagramm werden die Amplitude und die Phase des Frequenzganges getrennt voneinander dargestellt. Ein Bode-Diagramm wird von der Übertragungsfunktion gezeichnet.

i Hinweis

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$

Für den Amplitudengang erhält man:

$$A_v(\omega) = |\underline{H}_v(j\omega)|$$

und für den Phasengang:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{Im\{\underline{H}(j\omega)\}}{Re\{\underline{H}(j\omega)\}} \right)$$

Das Bode-Diagramm wird im Amplitudengang und Phasengang doppelt logarithmisch dargestellt.

23. Filterschaltungen, Bode-Diagramme und Ortskurven

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

R = 16e3
C = 10e-9

f = np.arange(10, 100e3, 10)
w = 2 * np.pi * f

b_gangTP = 1/np.sqrt(1 + (w*R*C)**2)
p_gangTP = np.arctan(-w*R*C)

b_gangTP_dB = 20 * np.log10(b_gangTP)
p_gangTP_grad = p_gangTP * 180/np.pi

plt.semilogx(f,b_gangTP_dB)
plt.xlabel("Frequenz in Hz (logarithmisch)")
plt.ylabel("Betragsgang in dB")
plt.grid()

plt.show()
```

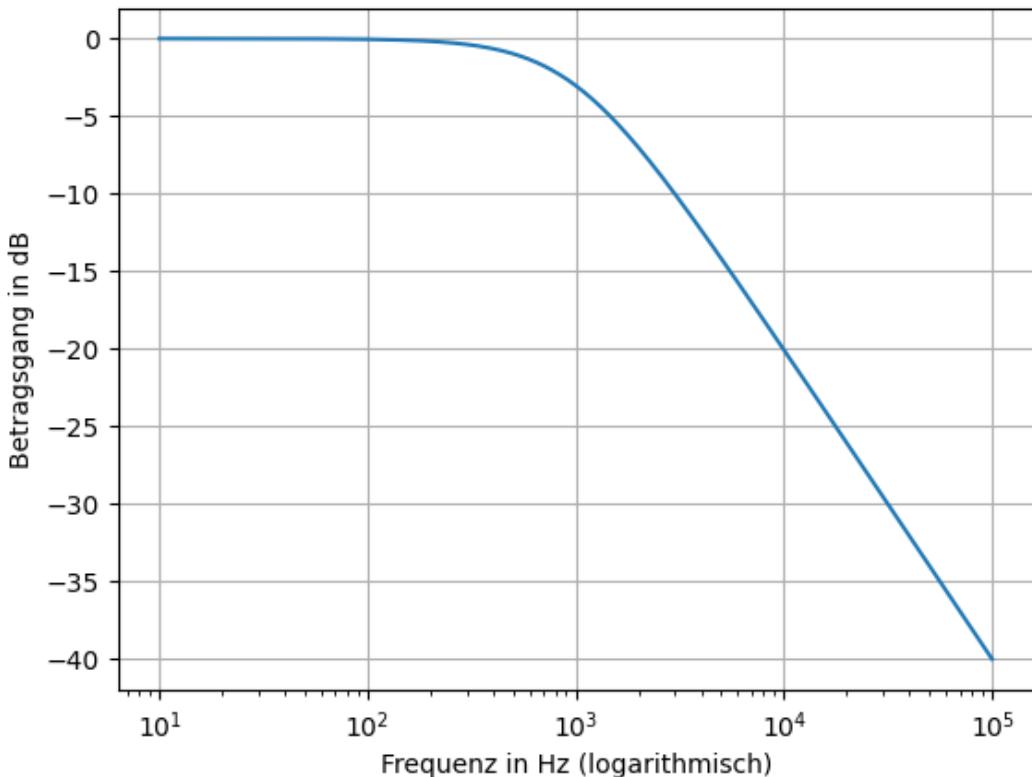


Abbildung 23.1.: Betragsgang

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

R = 16e3
C = 10e-9

f = np.arange(10, 100e3, 10)
w = 2 * np.pi * f

b_gangTP = 1/np.sqrt(1 + (w*R*C)**2)
p_gangTP = np.arctan(-w*R*C)

b_gangTP_dB = 20 * np.log10(b_gangTP)
p_gangTP_grad = p_gangTP * 180/np.pi

plt.semilogx(f,p_gangTP_grad)
plt.xlabel("Frequenz in Hz (logarithmisch)")
plt.ylabel("Phasengang in °")
plt.grid()

plt.show()

```

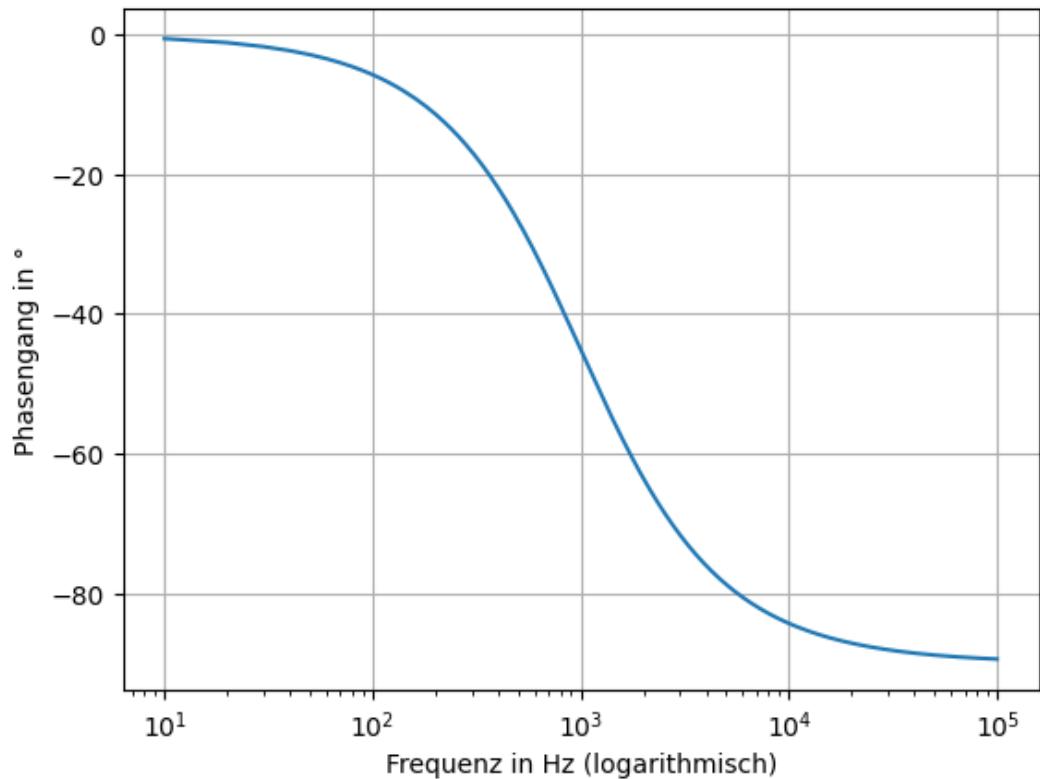


Abbildung 23.2.: Frequenzgang

23.1.2. dB

Wenn man eine Größe in dB ausdrücken möchte, dann kann man bei Strömen oder Spannungen folgende Formel anwenden.

i Hinweis

$$x_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(x)$$

Wichtige Größen in dB:

x	$20 \cdot \log_{10}(x)$	x	$20 \cdot \log_{10}(x)$
1	0 dB	1	0 dB
$\sqrt{2}$	3 dB	$1/\sqrt{2}$	-3 dB
2	6 dB	$1/2$	-6 dB
10	20 dB	$1/10$	-20 dB
100	40 dB	$1/100$	-40 dB
1000	60 dB	$1/1000$	-60 dB

23.2. Ortskurven

Die Ortskurve stellt die Veränderung einer komplexen Größe, die von einem reellen Parameter abhängt, in der komplexen Ebene dar. Man kann zum Beispiel die Impedanz in Abhängigkeit der Frequenz darstellen.

Am Beispiel einer Reihenschaltung aus Wirkwiderstand und Induktivität

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

erhält man folgende Ortskurve der Impedanz:

Entn. aus [23]

Man kann auch die Ortskurve der Admittanz aufstellen. In diesem Fall lässt sie sich aus der Ortskurve der Impedanz ableiten. Dazu muss nur der Kehrwert der Impedanz an allen Frequenzstellen genommen werden.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Da die Impedanz eine komplexe Zahl ist, muss der Kehrwert einer komplexen Zahl genommen werden. Zur Erinnerung: Den Kehrwert einer komplexen Zahl erhält man indem man den Kehrwert des Betrages bildet und den Phasenwinkel negiert.

Entn. aus [23]

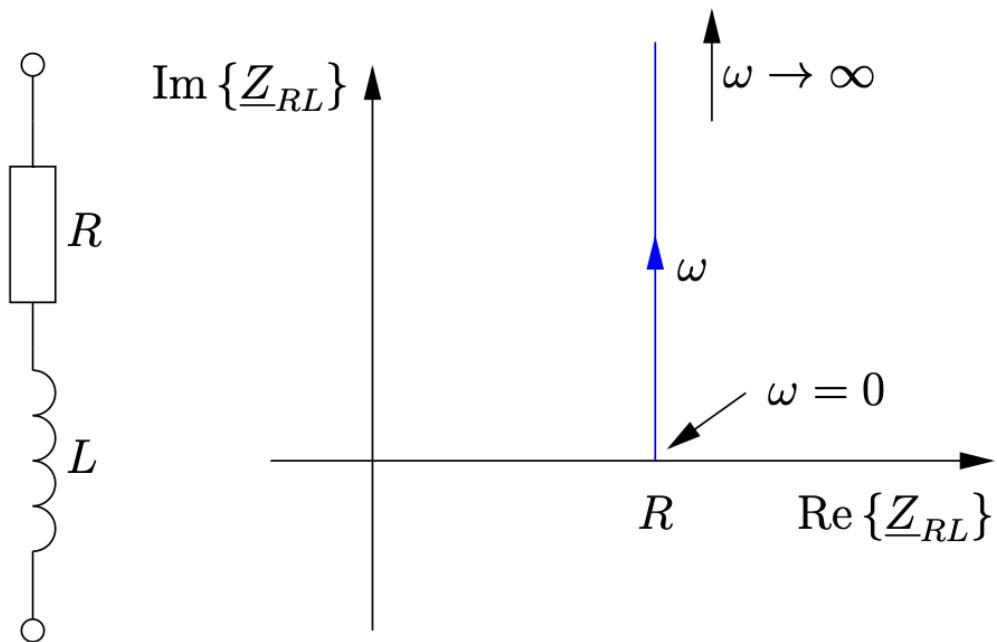


Abbildung 23.3.

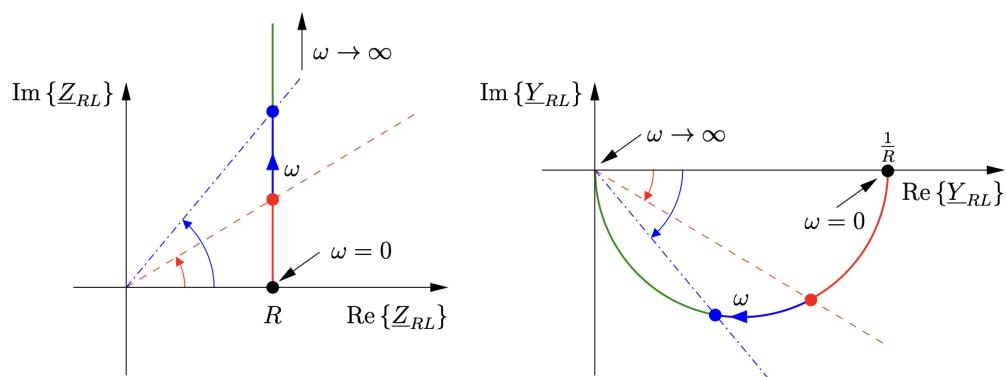


Abbildung 23.4.

23.2.1. Inversionsregeln

i 1. Inversionsregel: Inversion einer Gerade durch den Ursprung

“Die Inversion einer Geraden durch den Ursprung ergibt eine Gerade durch den Ursprung.”

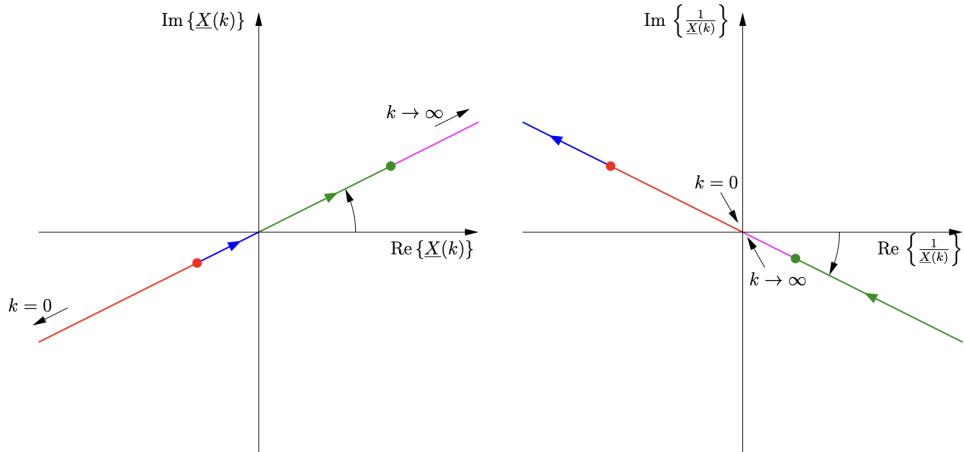


Abbildung 23.5.

Entn. aus [23]

i 2. Inversionsregel: Inversion einer allgemeinen Geraden

“Die Inversion einer allgemeinen Geraden ergibt einen Kreis durch den Ursprung.”

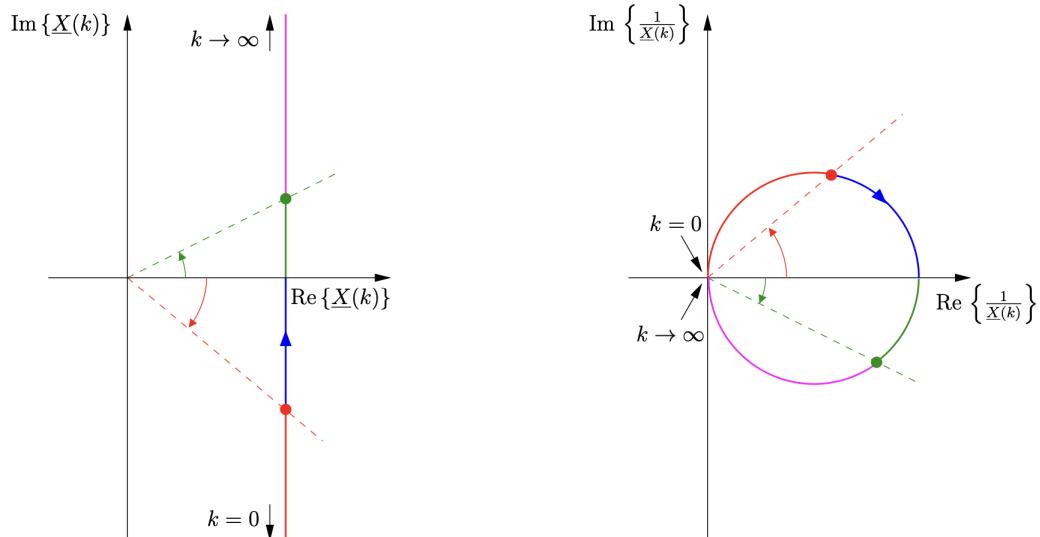


Abbildung 23.6.

Entn. aus [23]

i 3. Inversionsregel: Inversion eines allgemeinen Kreises

“Die Inversion eines allgemeinen Kreises ergibt einen allgemeinen Kreis.”

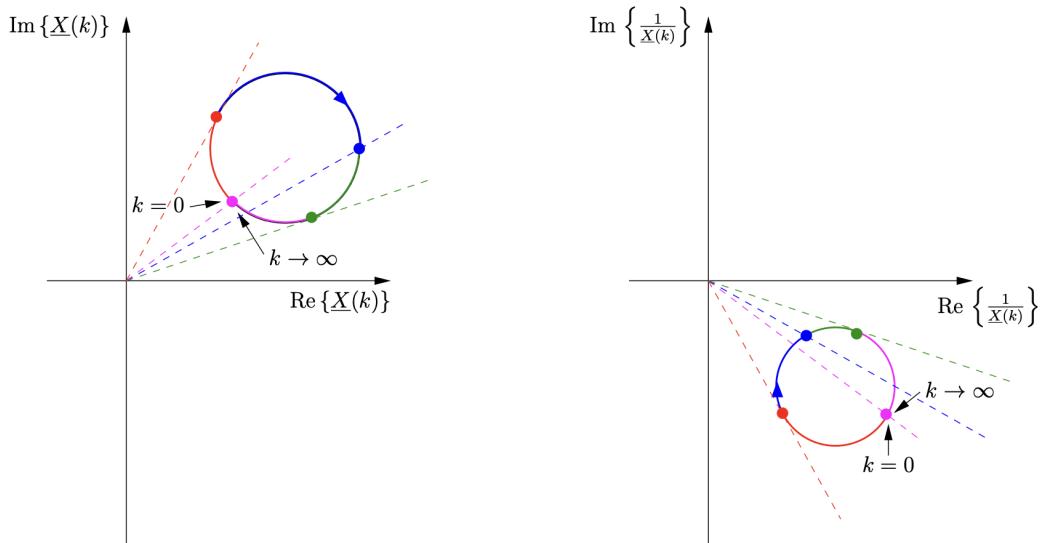


Abbildung 23.7.

Entn. aus [23]

23.3. Filterschaltungen

Aus zwei der Grundzweipole der Induktivität L und der Kapazität C, kann man in Kombination mit dem Wirkwiderstand R zwei Filterschaltungen bauen.

23.3.1. Tiefpass

Das Kennzeichen des Tiefpasses ist es, dass kleine Frequenzen so gut wie vollständig übertragen werden, während große Frequenzen zunehmend gedämpft werden. Ein Amplitudengang eines Tiefpasses kann zum Beispiel so aussehen:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

R = 16e3
C = 10e-9

f = np.arange(10, 100e3, 10)
w = 2 * np.pi * f

b_gangTP = 1 / np.sqrt(1 + (w*R*C)**2)
```

23. Filterschaltungen, Bode-Diagramme und Ortskurven

```
p_gangTP = np.arctan(-w*R*C)

b_gangTP_dB = 20 * np.log10(b_gangTP)
p_gangTP_grad = p_gangTP * 180/np.pi

plt.semilogx(f,b_gangTP_dB)
plt.xlabel("Frequenz in Hz (logarithmisch)")
plt.ylabel("Betragsgang in dB")
plt.grid()

plt.show()
```

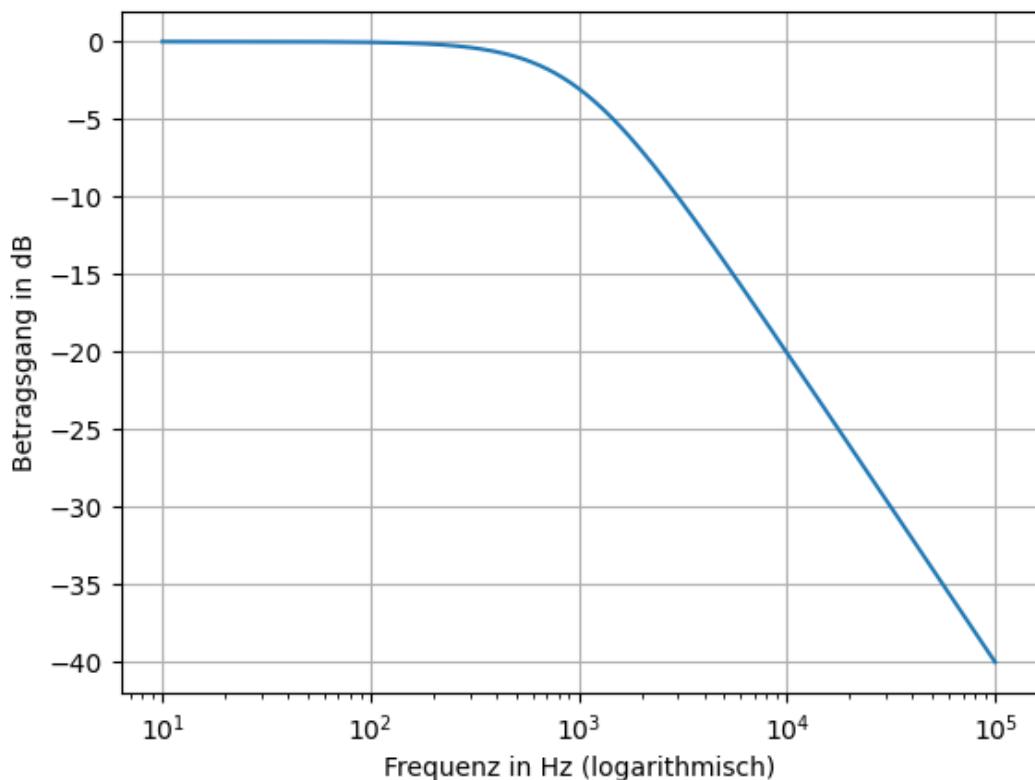


Abbildung 23.8.: Betragsgang des Tiefpasses

23.3.2. Hochpass

Bei einem Hochpass können hohe Frequenzen ungestört durch die Schaltung gehen, während kleinere Frequenzen gedämpft werden. Der Amplitudengang eines Tiefpasses könnte zum Beispiel so aussehen:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

R = 16e3
C = 10e-9
L = 1e-0

f = np.arange(10, 100e3, 10)
w = 2 * np.pi * f

b_gangHP = 1/np.sqrt(1 + (R/(w*L))**2)
p_gangHP = np.arctan(-w*R*C)

b_gangHP_dB = 20 * np.log10(b_gangHP)
p_gangHP_grad = p_gangHP * 180/np.pi

plt.semilogx(f,b_gangHP_dB)
plt.xlabel("Frequenz in Hz (logarithmisch)")
plt.ylabel("Betragsgang in dB")
plt.grid()

plt.show()

```

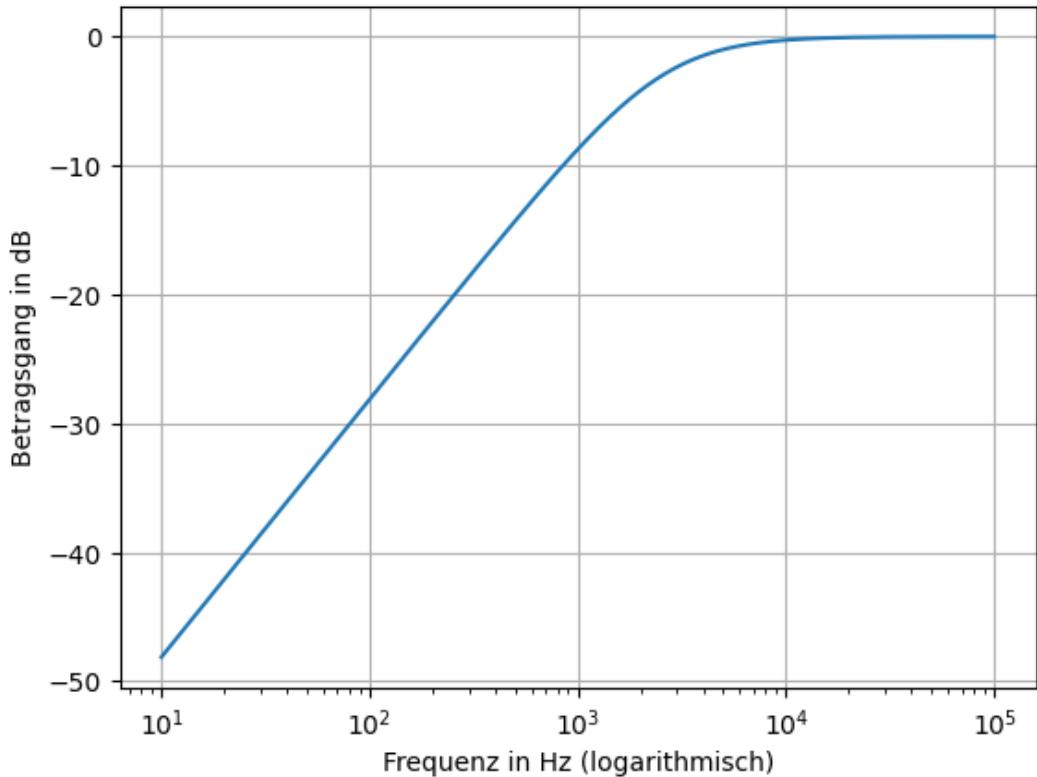


Abbildung 23.9.: Betragsgang des Hochpasses

23.4. Übungen

23.4.1. Übung 8.1 (Tief- und Hochpass)

Ordne die folgenden Schaltungen entweder dem Tiefpass oder Hochpass zu. Stelle zusätzlich für jede Schaltung die Übertragungsfunktion auf (keine Brüche im Nenner oder Zähler).

a)

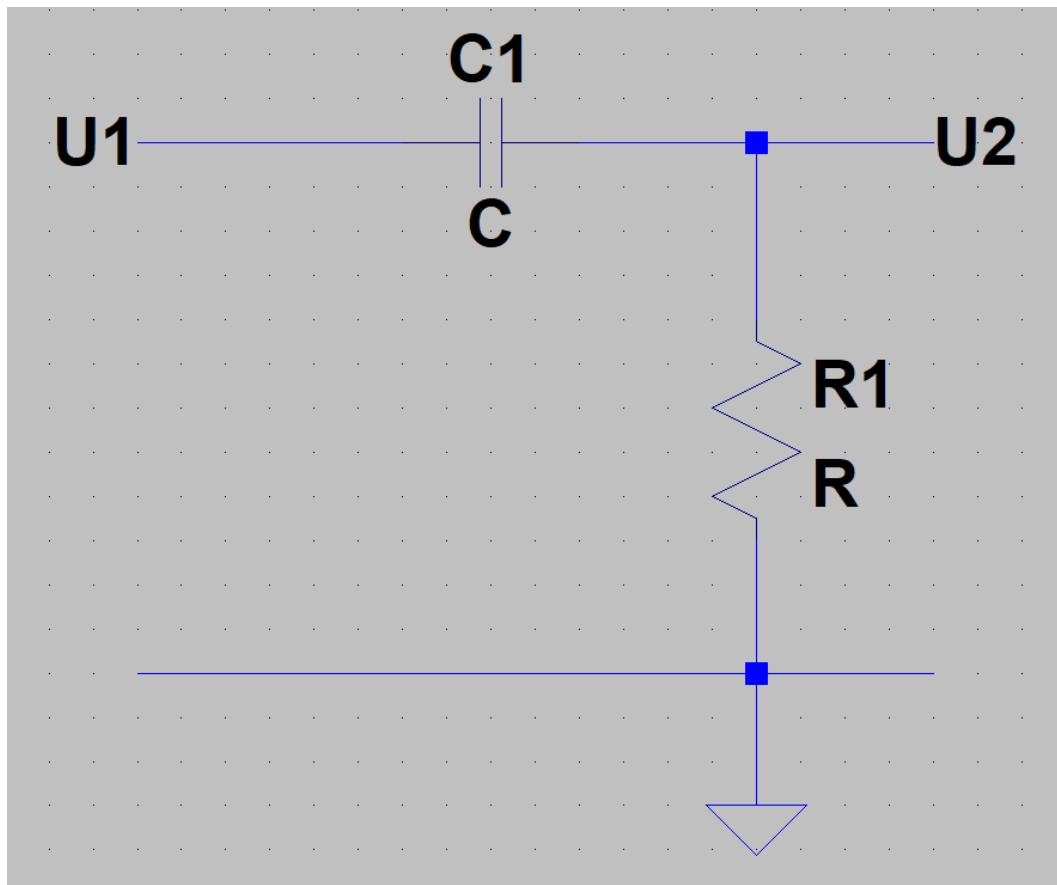


Abbildung 23.10.

b)

c)

d)

Lösung 8.1

- a) RC-Hochpass:

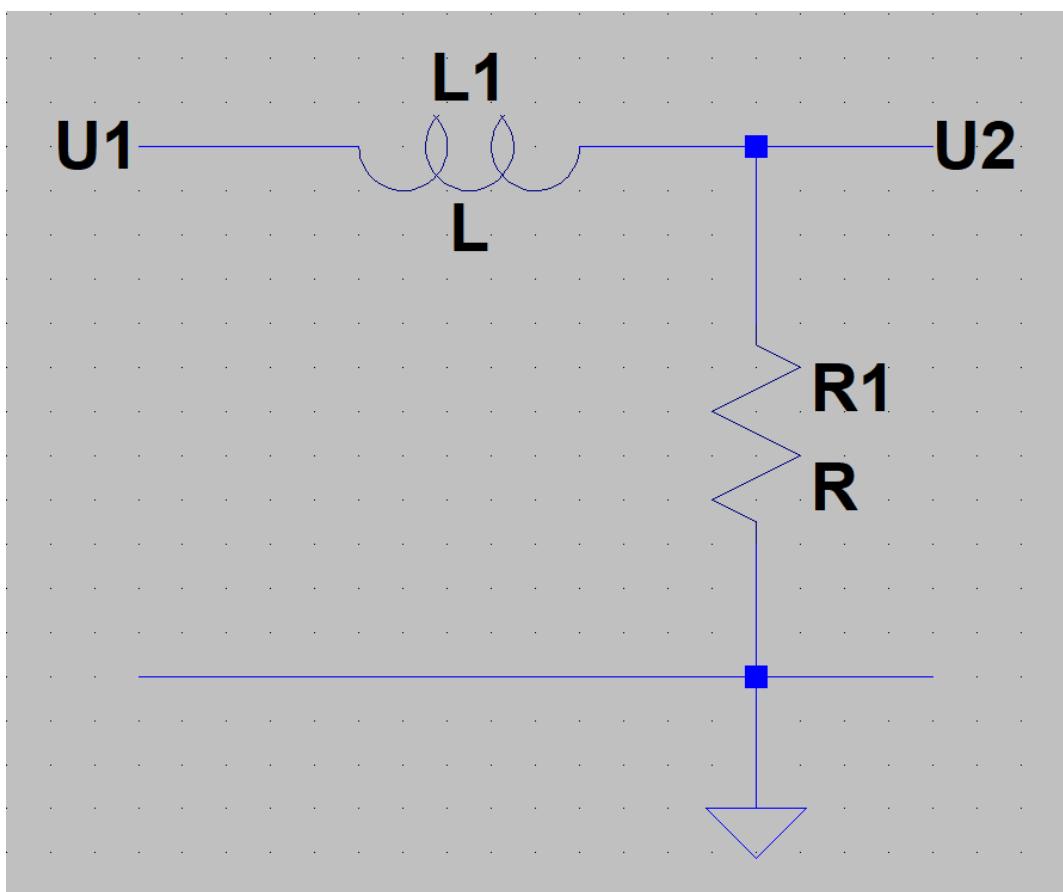


Abbildung 23.11.

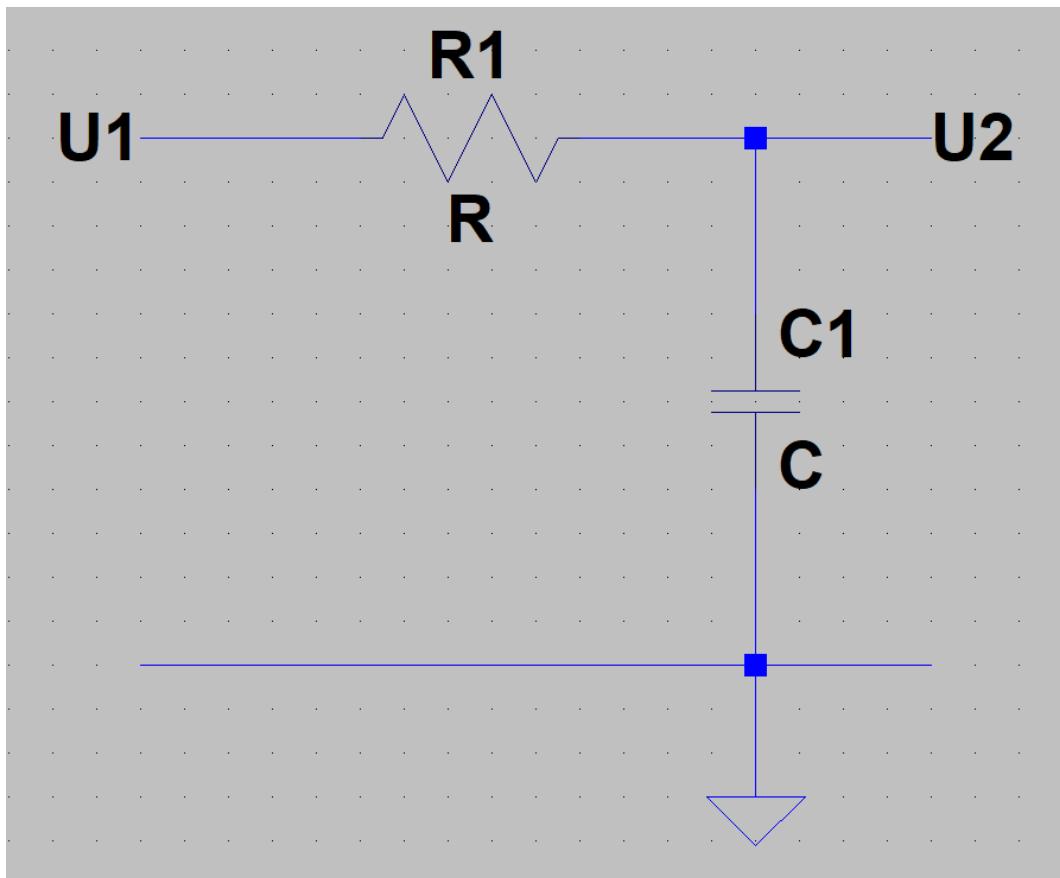


Abbildung 23.12.

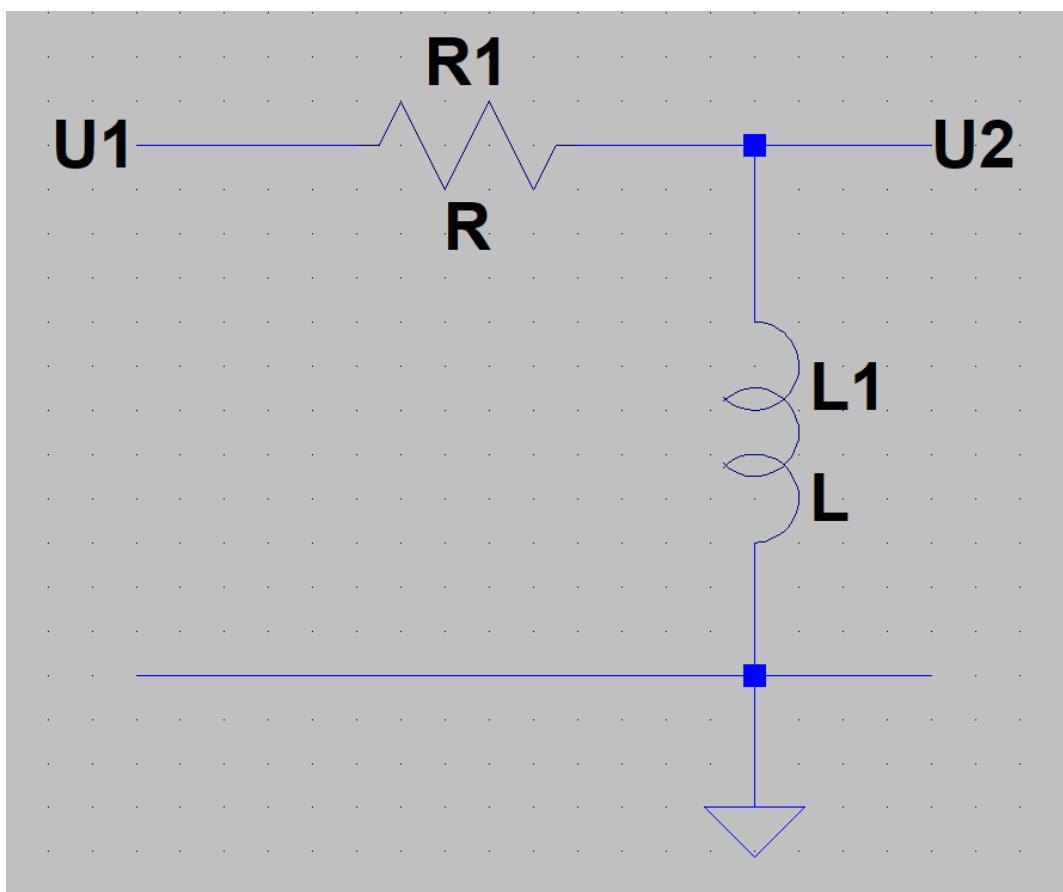


Abbildung 23.13.

$$H(j\omega) = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

b) RL-Tiefpass:

$$H(j\omega) = \frac{R}{j\omega L + R}$$

c) RC-Tiefpass:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

d) RL-Hochpass:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

23.4.2. Übung 8.2 (Tiefpass)

(Hagmann Aufgabe 9.1)

Der in dem Bild dargestellte Tiefpass enthält den Wirkwiderstand $R = 10 k\Omega$ und einen Kondensator mit der Kapazität $C = 120 nF$.

Bei welcher Frequenz f ist die Ausgangsspannung U_2 um den Faktor 10 kleiner als die Eingangsspannung U_1 ?

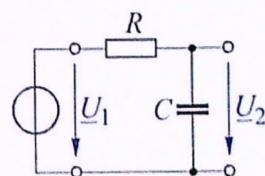


Abbildung 23.14.

Entn. aus [25]

Lösung 8.2

nach der Spannungsteilerregeln:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Betrag:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Umstellen und $\underline{U}_1/\underline{U}_2 = 10$ einsetzen:

$$\omega = \frac{\sqrt{(\underline{U}_1/\underline{U}_2)^2 - 1}}{RC} = \frac{\sqrt{10^2 - 1}}{10 k\Omega \cdot 120 nF} = 8,29 k1/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8,29 k1/s}{2\pi} = 1,32 kHz$$

23.4.3. Übung 8.3 (Tiefpass Grenzfrequenz)

(Hagmann Aufgabe 9.2)

Der in dem Bild dargestellte Tiefpass enthält den Wirkwiderstand $R = 1,5 k\Omega$. Die Kapazität C des vorhandenen Kondensators soll so gewählt werden, dass die Grenzfrequenz der Schaltung $f_g = 1,2 kHz$ wird.

Welchen Wert muss die Kapazität C haben?

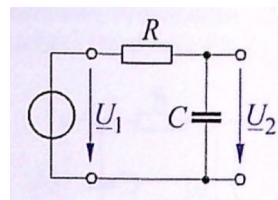


Abbildung 23.15.

Entn. aus [25]

🔥 Lösung 8.3

nach der Spannungsteilerregel:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Betrag:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Grenzfrequenz f_g ist bei $U_2/U_1 = 1/\sqrt{2}$:

$$\omega RC = 1$$

Kapazität:

$$C = \frac{1}{\omega R} = \frac{1}{2\pi \cdot 1,2 \text{ kHz} \cdot 1,5 \text{ k}\Omega} = 88,4 \text{ nF}$$

23.4.4. Übung 8.4 (Hochpass)

(Hagmann Aufgabe 9.8)

Der in dem Bild dargestellte Hochpass enthält eine Spule mit der Induktivität $L = 85 \text{ mH}$. Die Schaltung soll so ausgelegt werden, dass die Grenzfrequenz des Hochpasses $f_g = 2,5 \text{ kHz}$ wird.

Welchen Wert muss der Wirkwiderstand R haben?

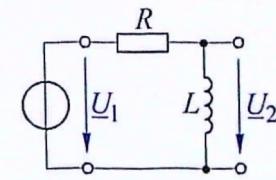


Abbildung 23.16.

Entn. aus [25]

🔥 Lösung 8.4

nach der Spannungsteilerregel:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Betrag:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Grenzfrequenz f_g ist bei $U_2/U_1 = 1/\sqrt{2}$:

$$R = \omega L$$

Wirkwiderstand:

$$R = \omega L = 2\pi \cdot 2,5 \text{ kHz} \cdot 85 \text{ mH} = 1,34 \text{ K}\Omega$$

23.4.5. Übung 8.6 (Ortskurve)

(Schenke 28.10)

Gegeben ist die folgende Schaltung:

- Zeichnen Sie die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}(\omega)$.
- Zeichnen Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}(\omega)$.

Lösung 8.6

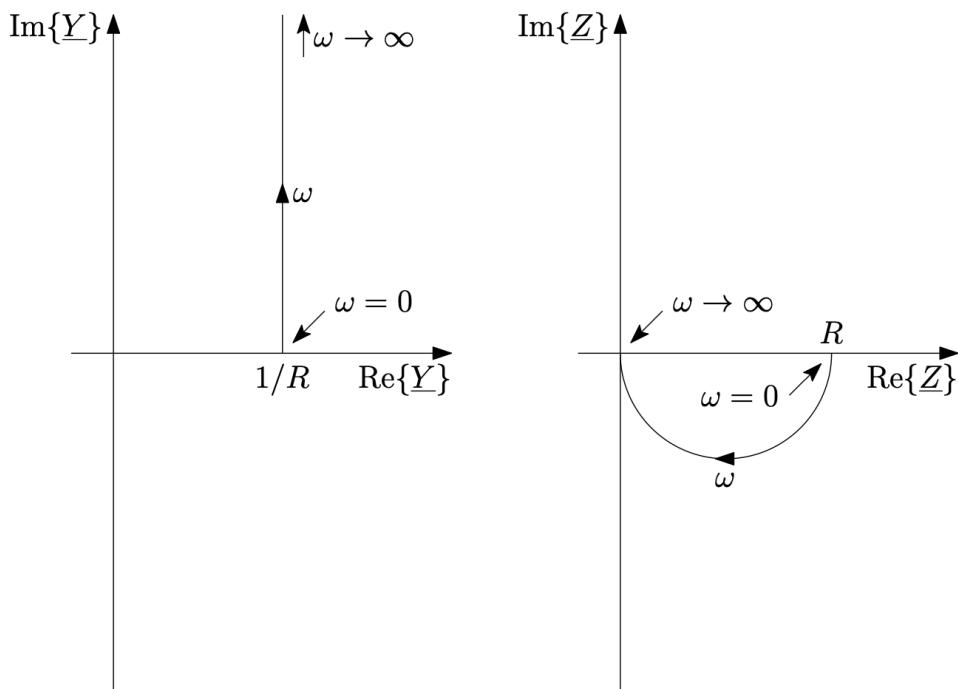


Abbildung 23.18.

Entn. aus [23]

23.4.6. Übung 8.7 (Ortskurve)

(Schenke 28.16)

Gegeben ist die folgende Schaltung:

- Zeichnen Sie die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}(\omega)$.

23. Filterschaltungen, Bode-Diagramme und Ortskurven

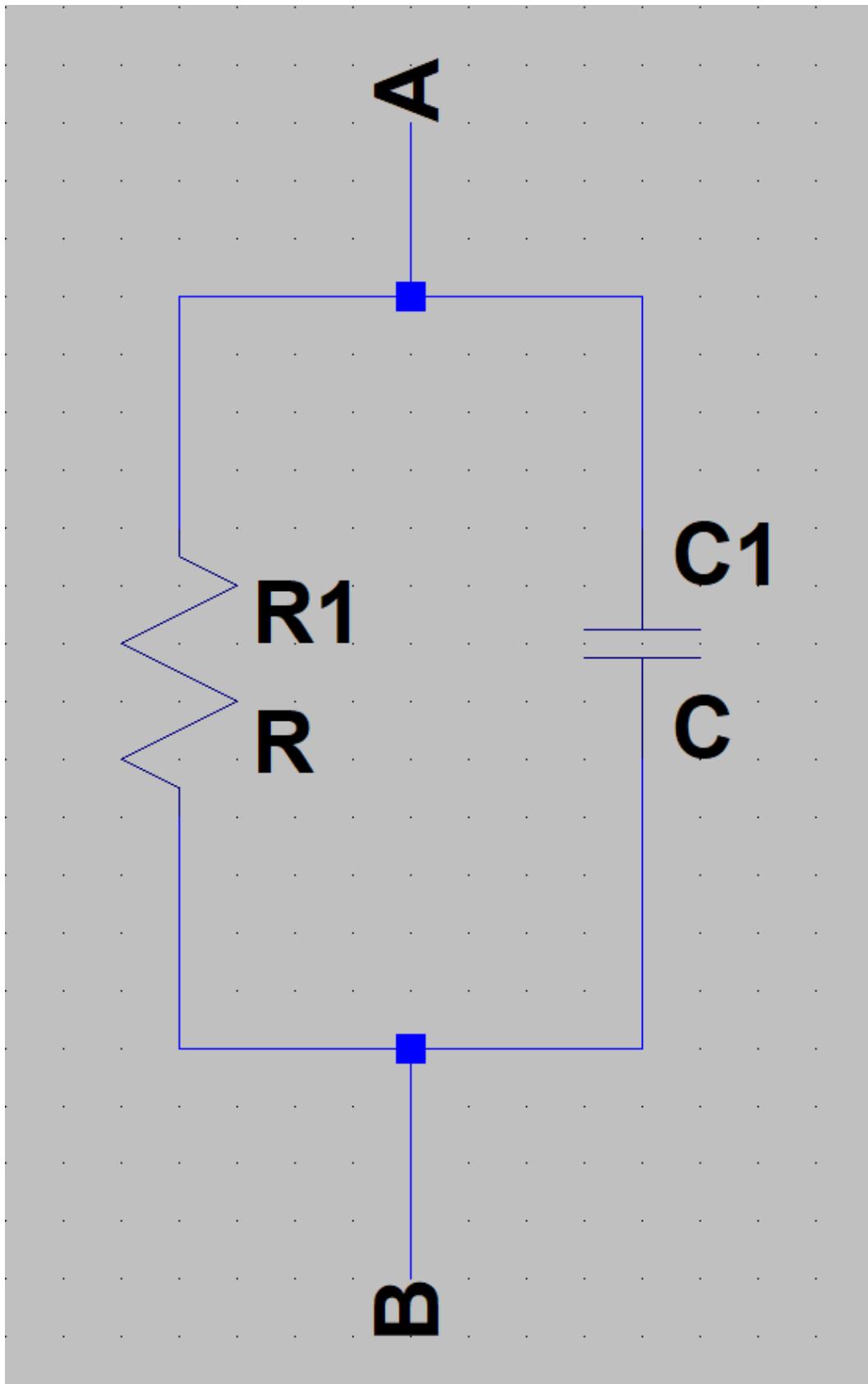


Abbildung 23.17.

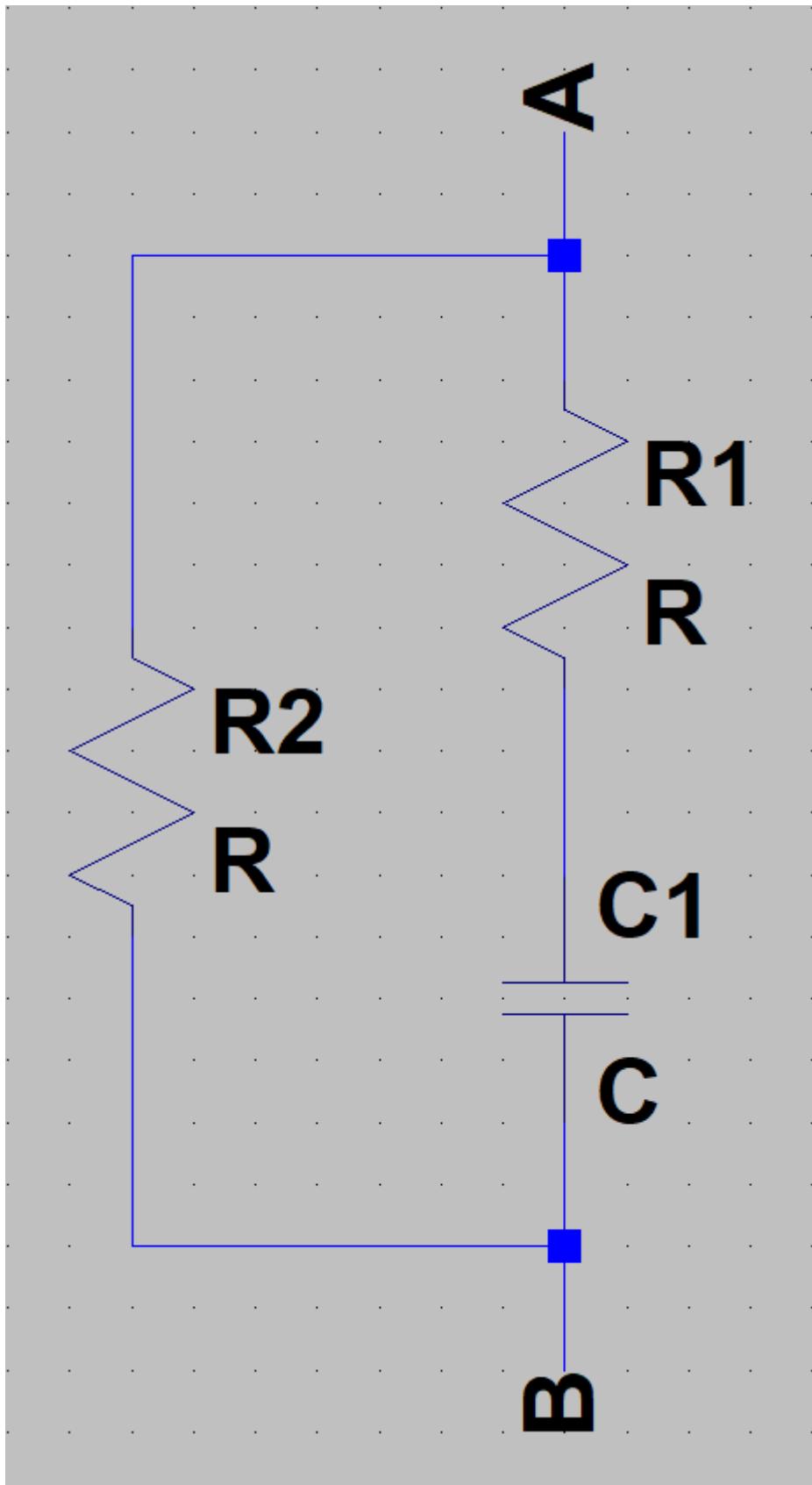


Abbildung 23.19.

🔥 Lösung 8.7

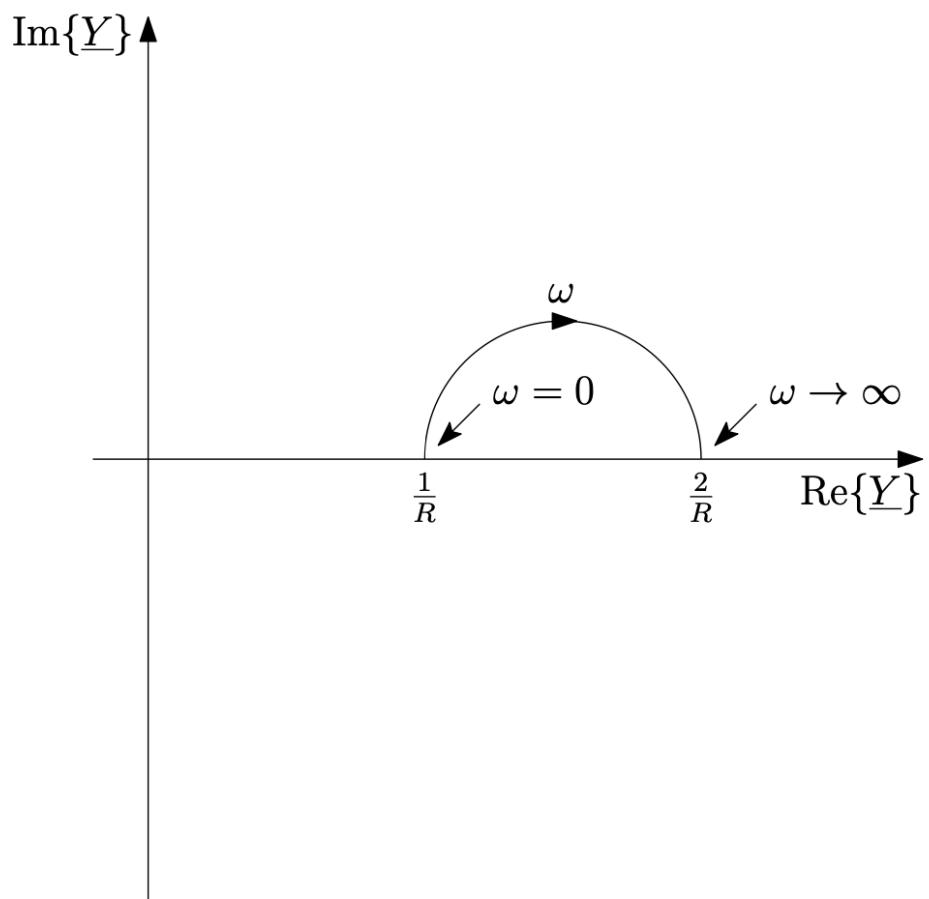


Abbildung 23.20.

Entn. aus [23]

24. Schwingkreise

- Reihenschwingkreis
 - Resonanzfrequenz
 - Bandbreite und Güte
- Parallelschwingkreis
 - Resonanzfrequenz
 - Bandbreite und Güte

24.1. Schwingkreis

Wenn man in der Elektrotechnik von "Schwingen" redet, dann versteht man darunter den wiederholten, wechselseitigen Energieaustausch, der zwischen zwei oder mehr Speichern passieren kann. Die Speicher sind für verschiedene Energieformen und wenn man in Form von Schaltelementen denkt, dann entsteht diese Speicherung durch elektrische und magnetische Felder. Zwei Bauteile, die bereits eingeführt wurden, die elektrische oder magnetische Felder aufbauen, sind die Kapazität C und die Induktivität L.

Da Kapazität und Induktivität nur als reale Bauteile, also als Kondensator und Spule, auftreten, kommt noch der Wirkwiderstand R hinzu. Diese Bauteile können in Form eines Reihenschwingkreises oder Parallelschwingkreises angeordnet sein.

24.2. Reihenschwingkreis

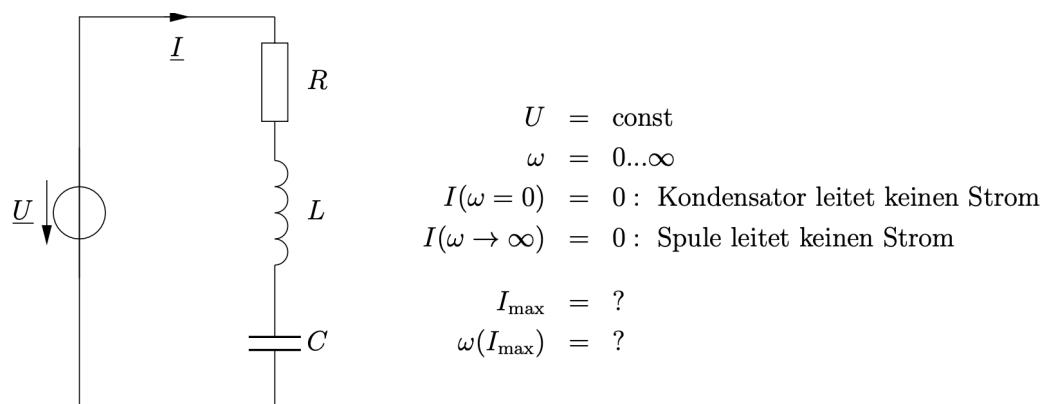


Abbildung 24.1.

24. Schwingkreise

Entn. aus [23]

Es muss eine Kreisfrequenz geben, bei der diese Schaltung den maximalen Strom leitet. Aus dem Ohmschen Gesetzt weiß man, dass der Strom maximal ist, wenn der Widerstand (in diesem Fall die Impedanz) minimal ist.

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

24.2.1. Resonanzfrequenz

Gibt es eine Frequenz, die dafür sorgt, dass der Imaginärteil der Impedanz zu null wird?

$$Im(\underline{Z}) = 0$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \cdot f_0$$

f_0 wird Resonanzfrequenz genannt, bei ihr ist der Strom maximal und es wird die maximale Leistung umgesetzt:

$$P_{max} = I_{max}^2 \cdot R$$

24.2.2. Bandbreite und Güte

Bei den "Grenzfrequenzen" des Schwingkreises wird die Hälfte der Leistung aufgenommen, also:

$$P_{1,2} = \frac{I_{max}^2 \cdot R}{2}$$

$$I_{1,2} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

Der Abstand zwischen den Grenzfrequenzen nennt man die Bandbreite B.

$$B = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi \cdot L}$$

Über die Bandbreite kann auch die Güte Q des Schwingkreises angegeben werden.

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

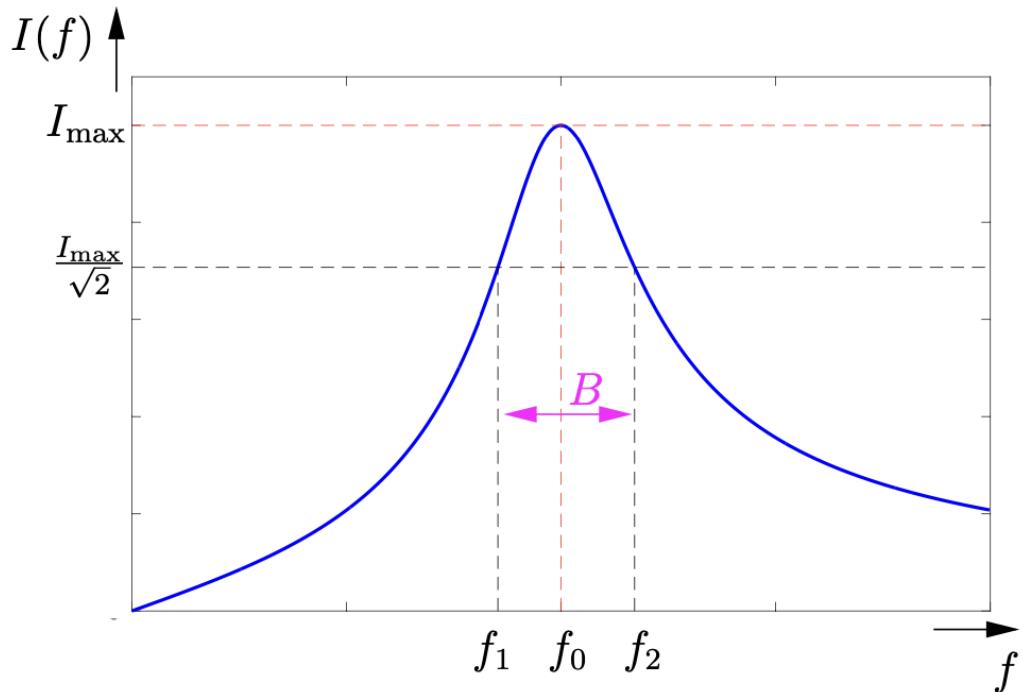


Abbildung 24.2.

Entn. aus [23]

24.3. Parallelschwingkreis

Entn. aus [23]

Es muss eine Kreisfrequenz geben, bei der diese Schaltung die maximale Spannung hat. Aus dem Ohmschen Gesetz weiß man, dass die Spannung maximal ist, wenn der Widerstand (in diesem Fall die Impedanz) maximal ist. Alternativ kann man sich auch die Admittanz ansehen, die müsste jedoch dann minimal werden.

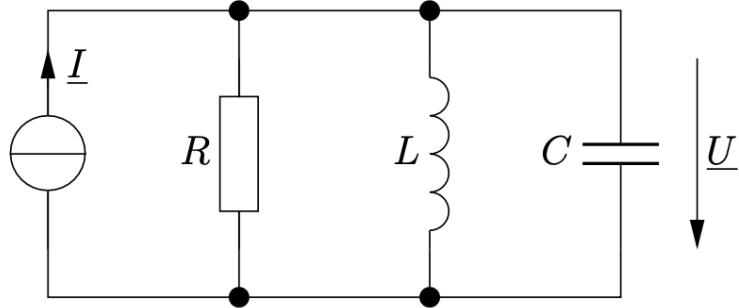
$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

24.3.1. Resonanzfrequenz

Gibt es eine Frequenz, die dafür sorgt, dass der Imaginärteil der Admittanz zu null wird?

$$\operatorname{Im}(\underline{Y}) = 0$$

24. Schwingkreise



$$I = \text{const}$$

$$\omega = 0 \dots \infty$$

$U(\omega = 0) = 0$: Spule wird zum Kurzschluss

$U(\omega \rightarrow \infty) = 0$: Kondensator wird zum Kurzschluss

$$U_{\max} = ?$$

$$\omega(U_{\max}) = ?$$

Abbildung 24.3.

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \cdot f_0$$

f_0 wird Resonanzfrequenz genannt, bei ihr ist die Spannung maximal und es wird die maximale Leistung umgesetzt:

$$P_{\max} = \frac{U_{\max}^2}{R}$$

24.3.2. Bandbreite und Güte

Bei den "Grenzfrequenzen" des Schwingkreises wird die Hälfte der Leistung aufgenommen, also:

$$P_{1,2} = \frac{U_{\max}^2}{2R}$$

$$U_{1,2} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

Der Abstand zwischen den Grenzfrequenzen nennt man die Bandbreite B.

$$B = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi \cdot RC}$$

Über die Bandbreite kann auch die Güte Q des Schwingkreises angegeben werden.

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

24.4. Übungen

24.4.1. Übung 9.1

(Hagmann Aufgabe 10.1)

Der im Bild dargestellte Reihenschwingkreis enthält die Wirkwiderstände $R_1 = 400 \Omega$ und $R_2 = 100 \Omega$ sowie eine Spule mit der Induktivität $L = 32 \text{ mH}$ und einen Kondensator mit der Kapazität $C = 1 \mu F$.

- a) Wie groß ist die Resonanzfrequenz f_r der Schaltung?
- b) Welchen Widerstand Z_r hat die Schaltung im Resonanzzustand?

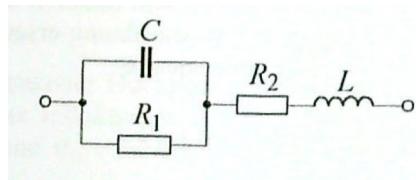


Abbildung 24.4.

Entn. aus [25]

Lösung 9.1

a)

Impedanz der Schaltung:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + j\omega C} + R_2 + j\omega L$$

Konjugiert-Komplex erweitern und umstellen nach Real- und Imaginärteil:

24. Schwingkreise

$$\underline{Z} = R_2 + \frac{\frac{1}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + (\omega C)^2} + j \left(\omega L - \frac{\omega C}{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + (\omega C)^2} \right)$$

Resonanzbedingung $\text{Im}(\underline{Z}) = 0$:

$$\omega L - \frac{\omega C}{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + (\omega C)^2} = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{R_1 C}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{32 \text{ mH} \cdot 1 \mu\text{F}} - \left(\frac{1}{400 \Omega \cdot 1 \mu\text{F}}\right)^2} = 5000 \frac{1}{\text{s}}$$

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{5000 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 796 \text{ Hz}$$

b)

Resonanzschaltung $\text{Im}(\underline{Z}) = 0$:

$$Z_r = \text{Re}(\underline{Z}) = R_2 + \frac{\frac{1}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + (\omega C)^2} = 100 \Omega + \frac{\frac{1}{400 \Omega}}{\left(\frac{1}{400 \Omega}\right)^2 + (5000 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \mu\text{F})^2} = 180 \Omega$$

24.4.2. Übung 9.2

(Hagmann Augabe 10.2)

Der im Bild dargestellte Parallelschwingkreis enthält den Wirkwiderstand $R = 20 \Omega$ und eine Spule mit der Induktivität $L = 10 \text{ mH}$. Die Kapazität C des vorhandenen Kondensators soll so gewählt werden, dass sich die Schaltung im Resonanzzustand befindet. Die Versorgungsspannung beträgt $U = 20 \text{ V}$. Sie hat die Frequenz $f = 800 \text{ Hz}$.

- a) Welche Kapazität C muss der Kondensator haben?
- b) Wie groß ist hierbei der von der Spannungsquelle gelieferte Strom I ?

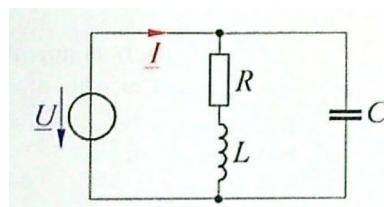


Abbildung 24.5.

Entn. aus [25]

 Lösung 9.2

a)

Admittanz der Schaltung:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$$

Konjugiert-komplex erweitern und nach Real- und Imaginärteil umstellen:

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right)$$

Resonanzbedingung $\text{Im}(\underline{Y})$:

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{10 \text{ mH}}{(20 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 800 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ mH})^2} = 3,42 \mu\text{F}$$

b)

Resonanzzustand $\text{Im}(\underline{Y}) = 0$:

$$Y_r = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{20 \Omega}{(20 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 800 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ mH})^2} = 6,83 \text{ mS}$$

$$I = U \cdot Y_r = 20 \text{ V} \cdot 6,83 \text{ mS} = 137 \text{ mA}$$

24.4.3. Übung 9.3

(Hagmann Aufgabe 10.5)

Der im Bild (a) dargestellte Reihenschwingkreis liegt an einer Wechselspannung von $U = 60 \text{ V}$ mit veränderbarer Frequenz. Von der Schaltung ist die in Bild (b) angegebene Resonanzkurve bekannt. Hierbei stellen I den im Kreis fließenden Strom und ω die Kreisfrequenz der Wechselspannung dar.

Welche Werte haben der Wirkwiderstand R , die Induktivität L und die Kapazität C der Schaltung?

Entn. aus [25]

 Lösung 9.3

im Resonanzzustand:

$$\omega = \omega_r = 4000 \text{ s}^{-1}$$

24. Schwingkreise

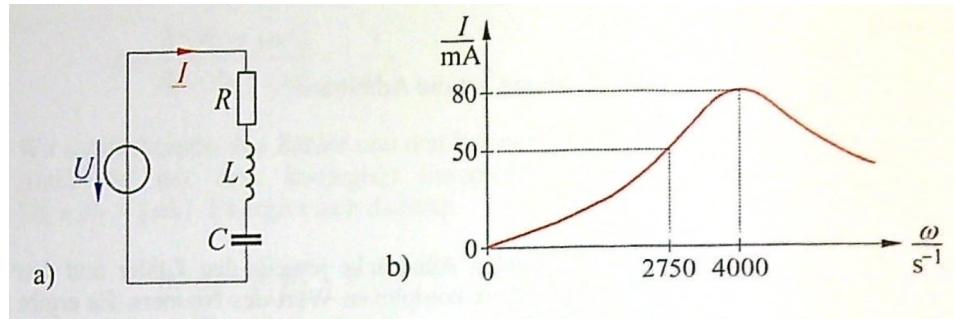


Abbildung 24.6.

$$I = I_r = 80 \text{ mA}$$

daraus ergibt sich der Wirkwiderstand:

$$R = \frac{U}{I_r} = \frac{60 \text{ V}}{80 \text{ mA}} = 750 \Omega$$

Scheinwiderstand bei $\omega_1 = 2750 \text{ s}^{-1}$:

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{60 \text{ V}}{50 \text{ mA}} = 1200 \Omega$$

außerdem gilt:

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right)^2$$

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

Gl. Nr.2 nach C auflösen und in Gl. Nr.1 einsetzen:

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{\omega_r^2 L}{\omega_1} \right)^2$$

$$L = \frac{\pm \sqrt{Z_1^2 - R^2}}{\omega_1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_1}} = \frac{\pm \sqrt{1200^2 - 750^2} \Omega}{\left(2750 - \frac{4000^2}{2750} \right) \text{ s}^{-1}} = \pm 305 \text{ mH}$$

$$L = 305 \text{ mH}$$

$$C = \frac{1}{\omega_r^2 L} = \frac{1}{(4000 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 305 \text{ mH}} = 205 \text{ nF}$$

25. Transformator

- idealer Transformator
- T-Ersatzschaltbild
- Vermessung eines Transformators

In den meisten Fällen besteht ein Transformator, oder auch kurz Trafo, aus mehreren magnetisch gekoppelten Spulen, die meistens auf einen Eisenkern gewickelt werden. Von Interesse ist zunächst nur der 1-phägige Transformator.

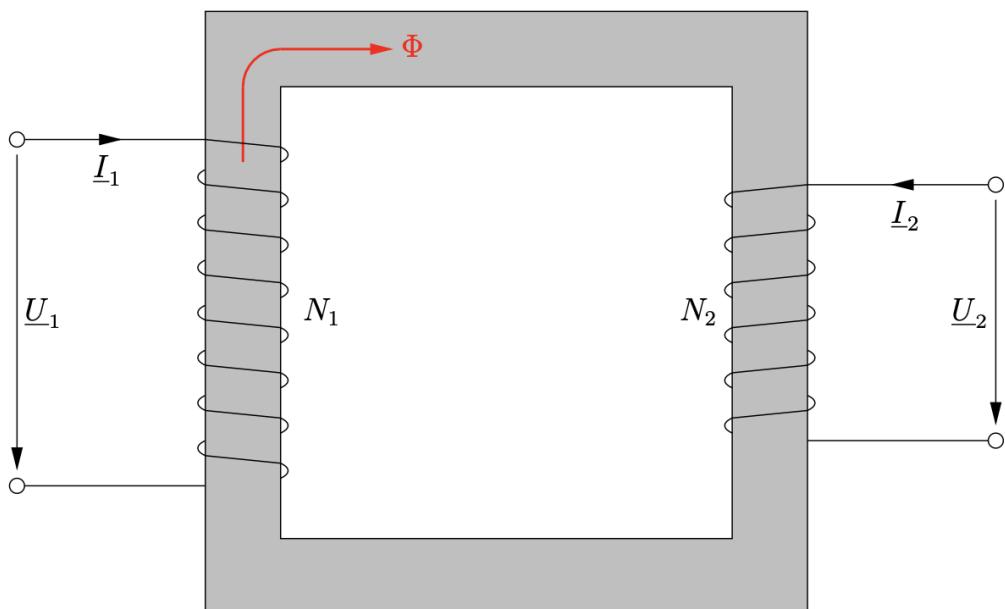


Abbildung 25.1.

Entn. aus [23]

Die Wicklung, die an die Spannungsversorgung angeschlossen ist, ist die Eingangsseite und wird Primärwicklung genannt, mit N_1 Windungen. Die Sekundärwicklung ist dagegen an der Ausgangsseite angeschlossen, mit der Anzahl N_2 Windungen, und ihr wird die Energie entnommen.

Der Zusammenhang der Spannungen und Ströme auf der Primär- und Sekundärseite kann mithilfe des magnetischen Kreises betrachtet werden. Diese Zusammenhänge sollten bereits Elektrodynamik bekannt sein.

25.1. Idealer Transformator

Als erstes wird der ideale Transformator betrachtet. Dieser Transformator hat keine Verluste und kann über das folgende einfache Ersatzschaltbild dargestellt werden.

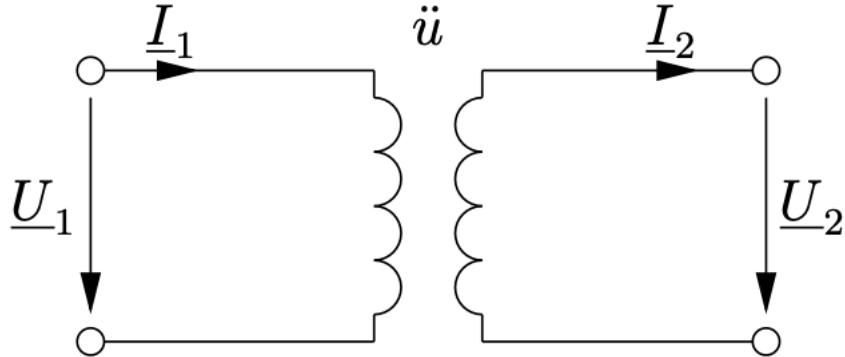


Abbildung 25.2.

Entn. aus [23]

Von Interesse ist hier das Übersetzungsverhältnis, da hiermit das Verhältnis der Spannungen U_1 und U_2 beschrieben werden kann. Unter Anwendung des Induktionsgesetzes

$$u_q = N \cdot \frac{d\Phi_t}{dt}$$

kann der Rückschluss auf die Anzahl der Windungen N geschlossen werden.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} =$$

Eine häufige Anwendung von Transformatoren ist die Änderung einer Spannung, zum Beispiel könnte die Netzspannung für den Betrieb eines Gerätes herunter transformiert werden. Dazu wird einmal beispielsweise ein Lastwiderstand R_L an die Ausgangsseite des Transformators angeschlossen:

Entn. aus [23]

Dadurch ergeben sich für Strom und Widerstand:

$$I_2 = \cdot I_1$$

$$^2 \cdot R_L = \frac{U_1}{I_1}$$

Durch die zweite Gleichung entsteht nun direkter Vergleich mit der Eingangsseite, für diese "fühlt" es sich so an, als wäre sie direkt mit dem Widerstand $R'_L = ^2 \cdot R_L$ verbunden.

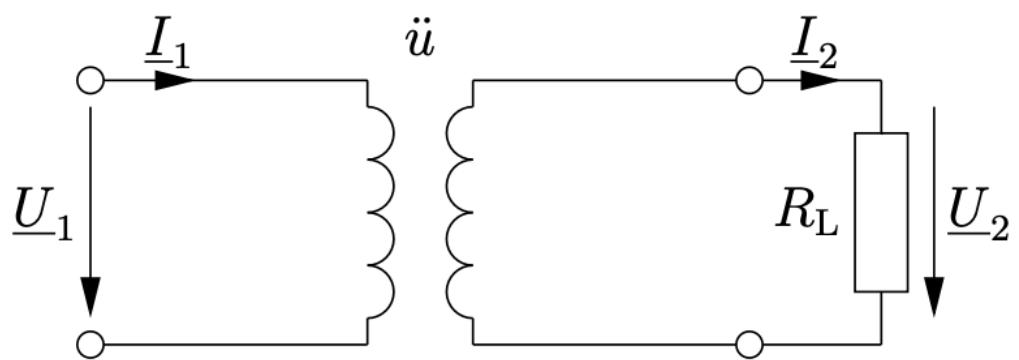


Abbildung 25.3.

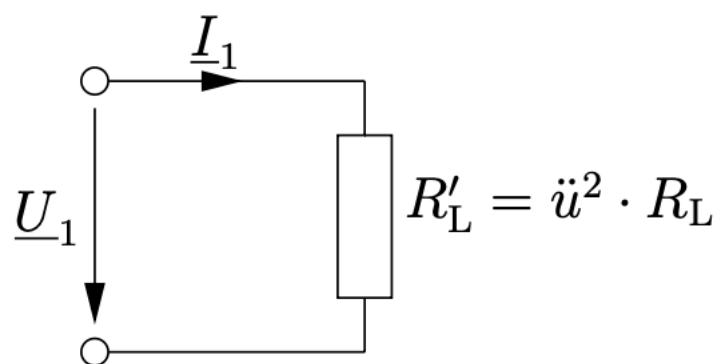


Abbildung 25.4.

25. Transformator

Entn. aus [23]

25.2. T-Ersatzschaltbild

Da es jedoch keine idealen Transformatoren gibt, müssen die Verluste berücksichtigt werden.

In den Leitungen gibt es ohmsche Verluste, es gibt Verluste im Eisenkern, dort werden Hysterese- und Wirbelstromverluste zusammengefasst, und auch durch die Ausbreitung des magnetischen Flusses in der Luft tragen zu den Verlusten bei.

Das T-Ersatzschaltbild berücksichtigt all diese Verluste:

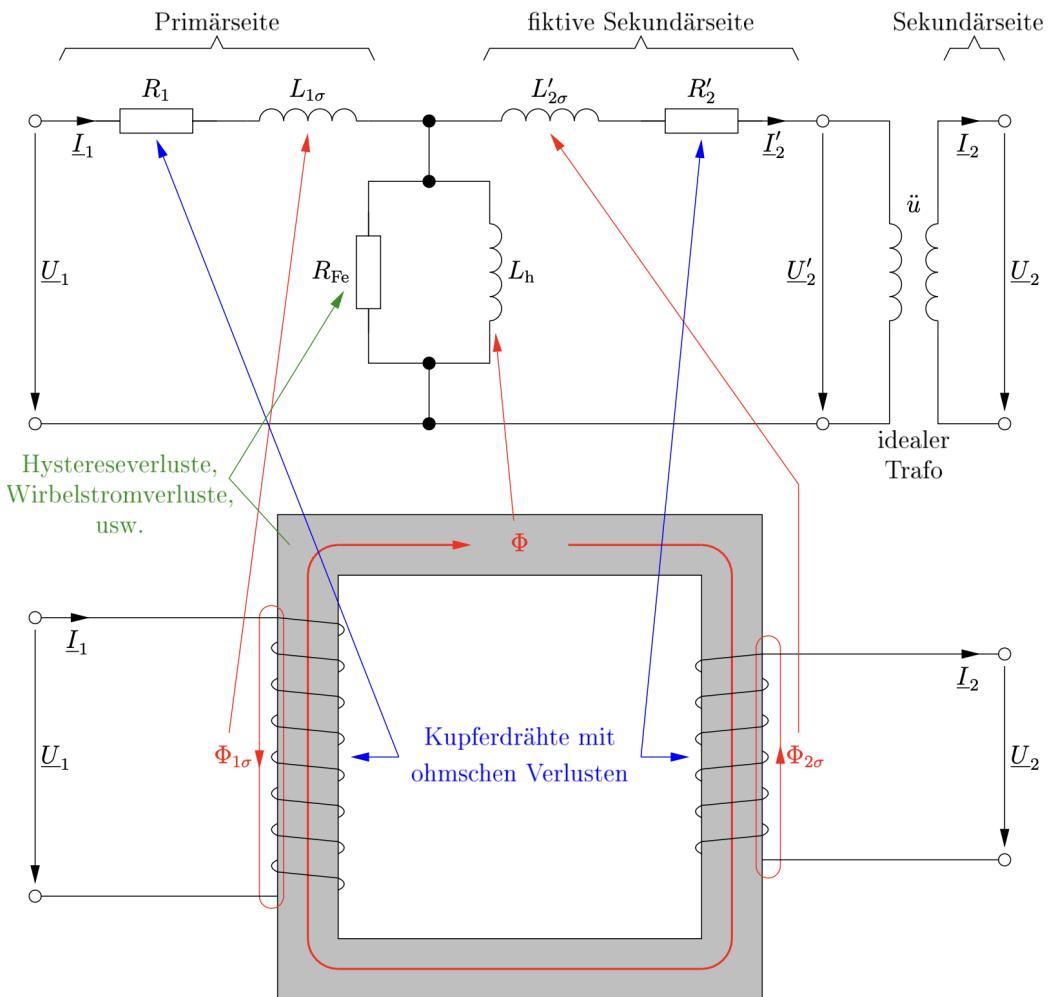


Abbildung 25.5.

Entn. aus [23]

Da die Ersatzgrößen auf der fiktiven Sekundärseite den idealen Transformator schon enthalten, wird dieser oft nicht mitgezeichnet.

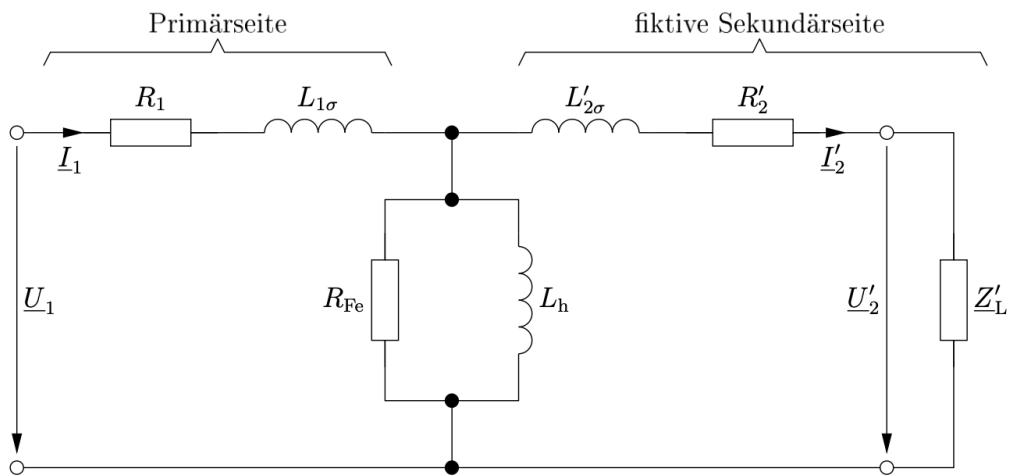


Abbildung 25.6.

Entn. aus [23]

Die Zusammenhänge der realen und fiktiven Größen der Sekundärseite sind hier zusammengefasst:

$$R'_2 = 2 \cdot R_2$$

$$L'_{2\sigma} = 2 \cdot L_{2\sigma}$$

$$Z'_L = 2 \cdot Z_L$$

$$U'_2 = \cdot U_2$$

$$I'_2 = \frac{1}{2} \cdot I_2$$

25.2.1. T-Symmetrie

Bei einem sinnvoll dimensioniertem Transformator liegt eine sogenannte T-Symmetrie vor:

$$R_1 = R'_2$$

$$L_{1\sigma} = L'_{2\sigma}$$

25.3. Vermessung eines Transformators

Um die Größen des Ersatzschaltbildes zu bestimmen, kann man zwei einfache Messungen anwenden.

25.4. Leerlaufversuch

An der Primärseite wird die Nennspannung U_{1N} angeschlossen und die Sekundärseite im Leerlauf betrieben.

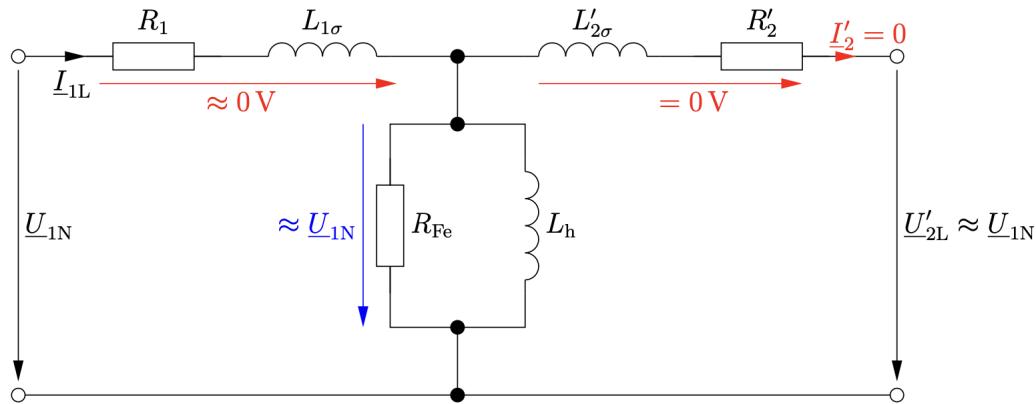


Abbildung 25.7.

Entn. aus [23]

Zur Ermittlung der Werte muss bekannt sein, dass die Wicklungsverluste in Vergleich zu den Eisenverlusten und die Streuinduktivität der Hauptinduktivität vernachlässigbar klein sind. Dadurch vereinfacht sich das Ersatzschaltbild weiter:

Entn. aus [23]

In der Praxis misst man nun die Nenneingangsspannung, den Nennleerlaufstrom und entweder die umgesetzte Wirkleistung P_L oder den Phasenverschiebungswinkel φ_L (zwischen U_{1N} und I_{1L}).

25.5. Kurzschlussversuch

Bei dem Kurzschlussversuch wird die Sekundärseite kurzgeschlossen. Hier muss beachtet werden, dass nun auch der Primärseite keine Nennspannung angelegt werden darf, dies würde wegen des Kurzschlusses den Transformator beschädigen!

Man erhöht daher langsam die primärseitige Spannung, bis der Nennstrom fließt. Dieser Strom fließt nun fast ausschließlich durch die Längsimpedanzen.

Entn. aus [23]

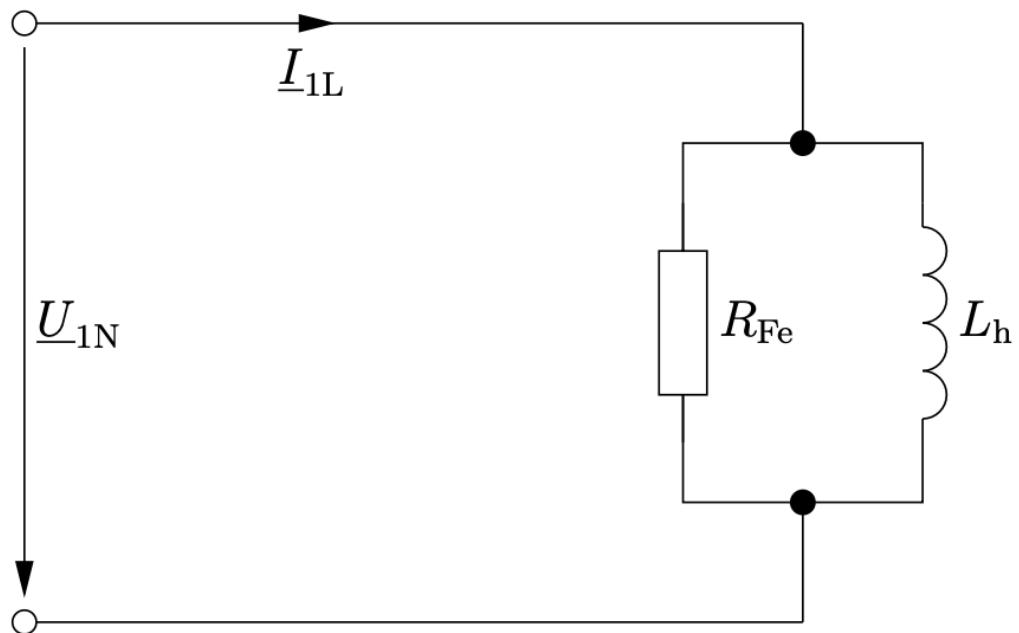


Abbildung 25.8.

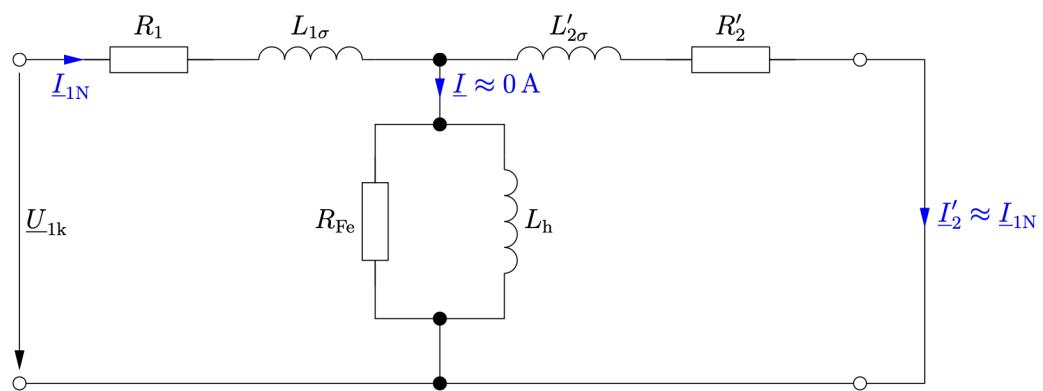


Abbildung 25.9.

25. Transformator

Wenn man die T-Symmetrie in Betracht zieht vereinfacht sich das Ersatzschaltbild erheblich.

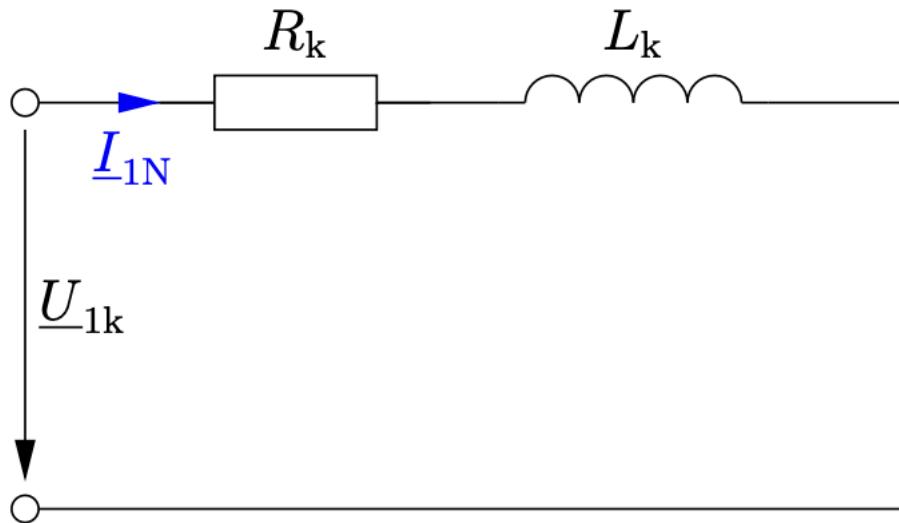


Abbildung 25.10.

Entn. aus [23]

Dabei gilt:

$$R_k = R_1 + R'_2 = 2R_1$$

$$L_k = L_{1\sigma} + L'_{2\sigma} = 2L_{1\sigma}$$

25.6. Übungen

25.6.1. Übung 10.1

(Schenke Trainingsaufgabe 35.1)

Beginnen Sie bei der folgenden Aufgabe mit dem vollständigen T-Ersatzschaltbild. Der Aufgabentext gibt Ihnen Hinweise, ob Sie Elemente des Ersatzschaltbildes weglassen können.

An einem T-Symmetrischen Transformator führen Sie den Leerlauf- und den Kurzschlussversuch durch. Die im Leerlauf gemessene Wirkleistungsaufnahme kann vernachlässigt werden.

Zeichnen Sie das T-Ersatzschaltbild dieses Transfomators.

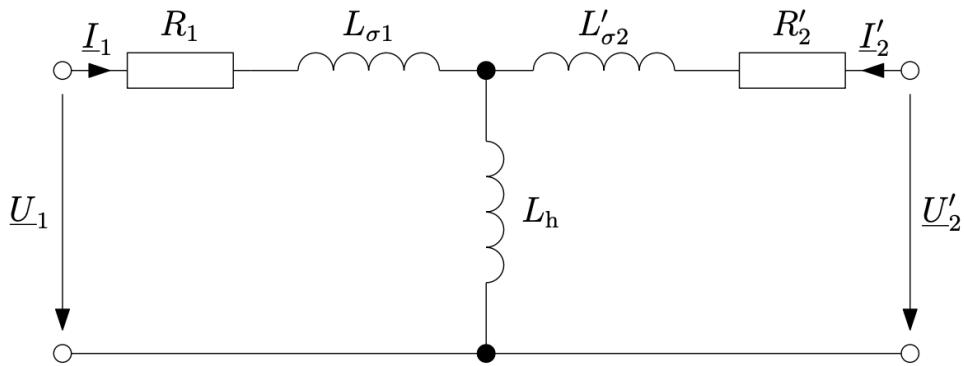
 Lösung 10.1


Abbildung 25.11.

Entn. aus [23]

25.6.2. Übung 10.2

(Schenke Trainingsaufgabe 35.4)

Beginnen Sie bei der folgenden Aufgabe mit dem vollständigen T-Ersatzschaltbild. Überlegen anhand der Messwerte, ob Sie Elemente des Ersatzschaltbildes weglassen können.

An einem T-Symmetrischen Transformator führen Sie bei der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ den Leerlauf- und Kurzschlussversuch durch.

Beim sekundärseitigen Leerlauf messen Sie auf der Primärseite die folgenden Werte:

$$U_1 = 200 \text{ V}$$

$$I_1 = 1 \text{ A}$$

$$P_1 = 20 \text{ W}$$

Beim sekundärseitigen Kurzschluss messen Sie auf der Primärseite die folgenden Werte:

$$U_1 = 2 \text{ V}$$

$$I_1 = 10 \text{ A}$$

25. Transformator

$$P_1 = 20 \text{ W}$$

Zeichnen Sie das T-Ersatzschaltbild dieses Transformators.

Lösung 10.2

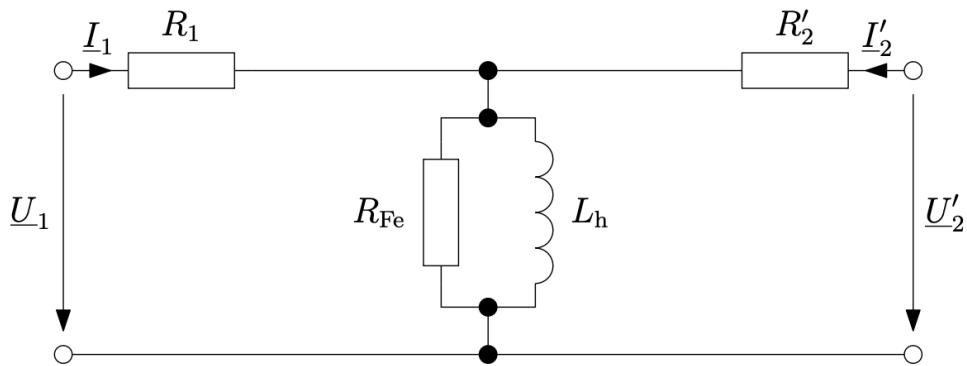


Abbildung 25.12.

Entn. aus [23]

25.6.3. Übung 10.3

(Schenke Trainingsaufgabe 35.7)

In der folgenden Aufgabe betrachten Sie nur das Leerlauf-Ersatzschaltbild des Transformators. Berechnen Sie dessen Bauelemente anhand der Messwerte.

An einem T-Symmetrischen Transformator führen Sie bei der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ den Leerlaufversuch durch.

Auf der Primärseite messen Sie die folgenden Werte:

$$U_1 = 200 \text{ V}$$

$$I_1 = 1 \text{ A}$$

$$P_1 = 50 \text{ W}$$

Berechnen Sie die Elemente R_{Fe} und L_h des T-Ersatzschaltbildes.

 Lösung 10.3

$$R_{Fe} = \frac{U_1^2}{P_1} = \frac{(200 \text{ V})^2}{50 \text{ W}} = 800 \Omega$$

$$Q_L = \sqrt{(U_1 \cdot I_1)^2 - P_1^2} = \sqrt{(200 \text{ VA})^2 - (50 \text{ W})^2} = 193,65 \text{ var}$$

$$L_h = \frac{U_1^2}{2\pi \cdot f \cdot Q_L} = \frac{40000 \text{ V}^2}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 193,65 \text{ var}} = 657,5 \text{ mH}$$

25.6.4. Übung 10.4

(Schenke Trainingsaufgabe 35.14)

In der folgenden Aufgabe betrachten Sie nur das Kurzschluss-Ersatzschaltbild des Transfornators. Berechnen Sie dessen Bauelemente anhand der Messwerte.

An einem T-Symmetrischen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $= 10$ führen Sie bei der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ den Kurzschlussversuch durch.

Auf der Primärseite messen Sie die folgenden Werte:

$$U_1 = 5 \text{ V}$$

$$I_1 = 10 \text{ A}$$

$$\varphi_1 = 45^\circ$$

Berechnen Sie die Elemente R_1 , R'_2 , $L_{1\sigma}$ und $L'_{2\sigma}$ des T-Ersatzschaltbildes, sowie die Werte des sekundären Wicklungswiderstandes R_2 und der sekundären Streuinduktivität $L_{2\sigma}$.

 Lösung 10.4

$$R_k = \frac{U_1}{I_1} \cdot \cos(\varphi_1) = \frac{5 \text{ V}}{10 \text{ A}} \cdot \cos(45^\circ) = 353,55 \text{ m}\Omega$$

$$R_1 = R'_2 = \frac{R_k}{2} = \frac{353,55 \text{ m}\Omega}{2} = 176,78 \text{ m}\Omega$$

$$L_k = \frac{U_1}{\omega \cdot I_1} \cdot \sin(\varphi_1) = \frac{5 \text{ V}}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ A}} \cdot \sin(45^\circ) = 1,13 \text{ mH}$$

$$L_{1\sigma} = L'_{2\sigma} = \frac{L_k}{2} = \frac{1,13 \text{ mH}}{2} = 562,7 \mu\text{H}$$

$$R_2 = \frac{R'_2}{2} = \frac{176,78 \text{ m}\Omega}{100} = 1,77 \text{ m}\Omega$$

25. Transformator

$$L_{2\sigma} = \frac{L'_{2\sigma}}{2} = \frac{562,7 \mu H}{100} = 5,63 \mu H$$

26. Klausurvorbereitung I

26.1. Aufgabe 11.1 (Übertragungsfunktion)

(Weißgerber Klausursammlung Abschnitt 3 Aufgabenblatt 1 Aufgabe 1.1)

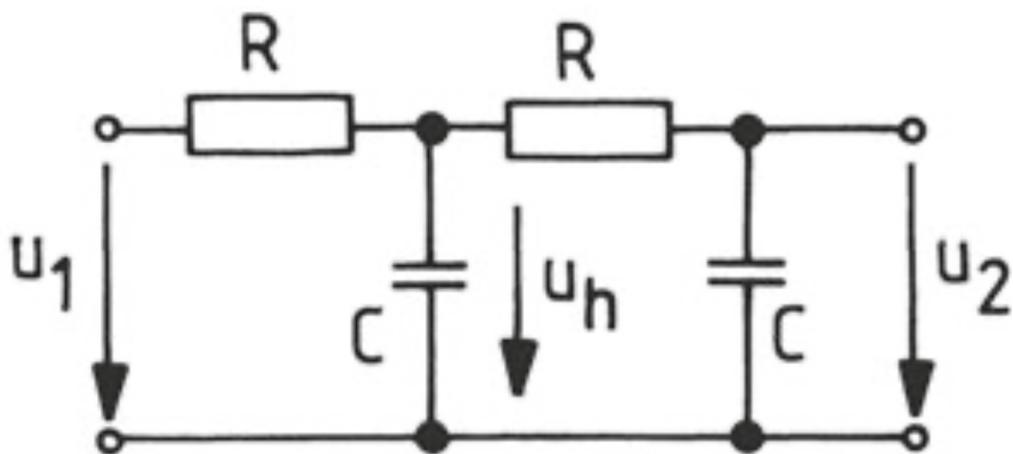


Abbildung 26.1.

Entn. aus [27]

Ermitteln Sie das Spannungsverhältnis $\frac{U_2}{U_1}$. Die Hilfsspannung U_h soll die Lösung erleichtern.

Lösung 11.1

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{U_h} \cdot \frac{U_h}{U_1}$$

$$\frac{U_2}{U_h} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\frac{U_h}{U_1} = \frac{\frac{(R + \frac{1}{j\omega C}) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{2}{j\omega C}}}{\frac{(R + \frac{1}{j\omega C}) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{2}{j\omega C}} + R} = \frac{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \frac{1}{j\omega C} + R \cdot \left(R + \frac{2}{j\omega C}\right)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \frac{1}{j\omega C} + R \cdot \left(R + \frac{2}{j\omega C}\right)} \\ \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)^2}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \frac{1}{j\omega C} + R \cdot \left(R + \frac{2}{j\omega C}\right)^2} \\ \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{1}{R \cdot j\omega C + 1 + R^2 \cdot (j\omega C)^2 + 2 \cdot R \cdot j\omega C} \\ \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{1}{(1 - \omega^2 R^2 C^2) + j\omega 3RC}\end{aligned}$$

26.2. Aufgabe 11.2 (Schwingkreis)

(Weißgerber Klausursammlung Abschnitt 3 Aufgabenblatt 4 Aufgabe 2)

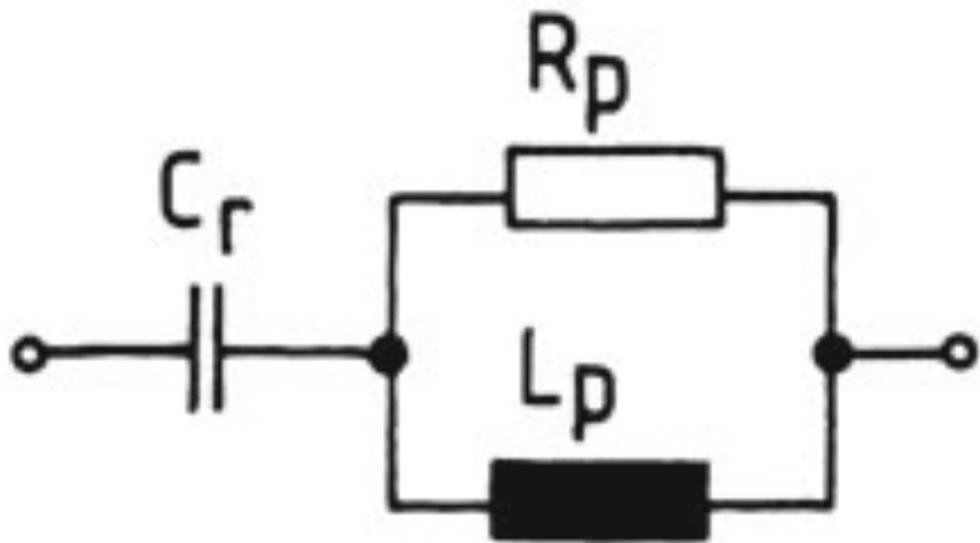


Abbildung 26.2.

Entn. aus [27]

- Entwickeln Sie die Formel für den komplexen Widerstand \underline{Z} der gezeichneten Schaltung in algebraischer Form (Real- und Imaginärteil soll getrennt sein).
- Berechnen Sie den Wert der Induktivität L_p , damit bei gegebenen Größen $C_r = 2 \mu F$, $R_p = 1 k\Omega$ und $\omega = 1000 s^{-1}$ die Schaltung in Resonanz ist.
- Kontrollieren Sie das Ergebnis für L_p , indem Sie den komplexen Widerstand \underline{Z} berechnen.

Lösung 11.2

a)

Aufstellen der Gleichung und konjugiert-komplex erweitern:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_r} + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}} = -j \cdot \frac{1}{\omega C_r} + \frac{1}{\frac{1}{R_p} - j\frac{1}{\omega L_p}} \cdot \frac{\frac{1}{R_p} + j\frac{1}{\omega L_p}}{\frac{1}{R_p} + j\frac{1}{\omega L_p}}$$

Ausmultiplizieren und umstellen:

$$\underline{Z} = -j\frac{1}{\omega C_r} + \frac{\frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2}} + j\frac{\frac{1}{\omega L_p}}{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2}} = \frac{\frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2}} + j \left(\frac{\frac{1}{\omega L_p}}{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2}} - \frac{1}{\omega C_r} \right)$$

b)

Resonanzbedingung: $\text{Im}\{\underline{Z}\} = 0$

$$\frac{\frac{1}{\omega L_p}}{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2}} = \frac{1}{\omega C_r}$$

$$\frac{1}{\omega L_p} = \frac{1}{\omega C_r} \cdot \left(\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2} \right) = \frac{1}{\omega R_p^2 C_r} + \frac{1}{\omega^3 L_p^2 C_r}$$

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{R_p^2 C_r} + \frac{1}{\omega^2 L_p^2 C_r}$$

$\cdot (\omega^2 \cdot C_r \cdot L_p^2)$:

$$\omega^2 L_p C_r = \omega^2 \frac{L_p^2}{R_p^2} + 1$$

eine Seite nach 0 umstellen und $\cdot (\frac{R_p^2}{\omega^2})$:

$$L_p^2 - R_p^2 C_r \cdot L_p + \frac{R_p^2}{\omega^2} = 0$$

pq-Formel:

$$L_{p1,2} = \frac{R_p^2 C_r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R_p^2 C_r}{2}\right)^2 - \frac{R_p^2}{(1000s^{-1})^2}} = \frac{(1k\Omega)^2 \cdot 2\mu F}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(1k\Omega)^2 \cdot 2\mu F}{2}\right)^2 - \frac{(1k\Omega)^2}{(1000s^{-1})^2}}$$

$$L_p = 1H$$

c)

$$\underline{Z} = -j\frac{1}{\omega C_r} + \frac{R_p \cdot j\omega L_p}{R_p + j\omega L_p} = -j\frac{1}{1000s^{-1} \cdot 2\mu F} + \frac{1k\Omega \cdot j \cdot 1000s^{-1} \cdot 1H}{1k\Omega + j \cdot 1000s^{-1} \cdot 1H} = 500\Omega$$

26.3. Aufgabe 11.3 (Anpassung)

(Weißgerber Klausursammlung Abschnitt 3 Aufgabenblatt 1 Aufgabe 3)

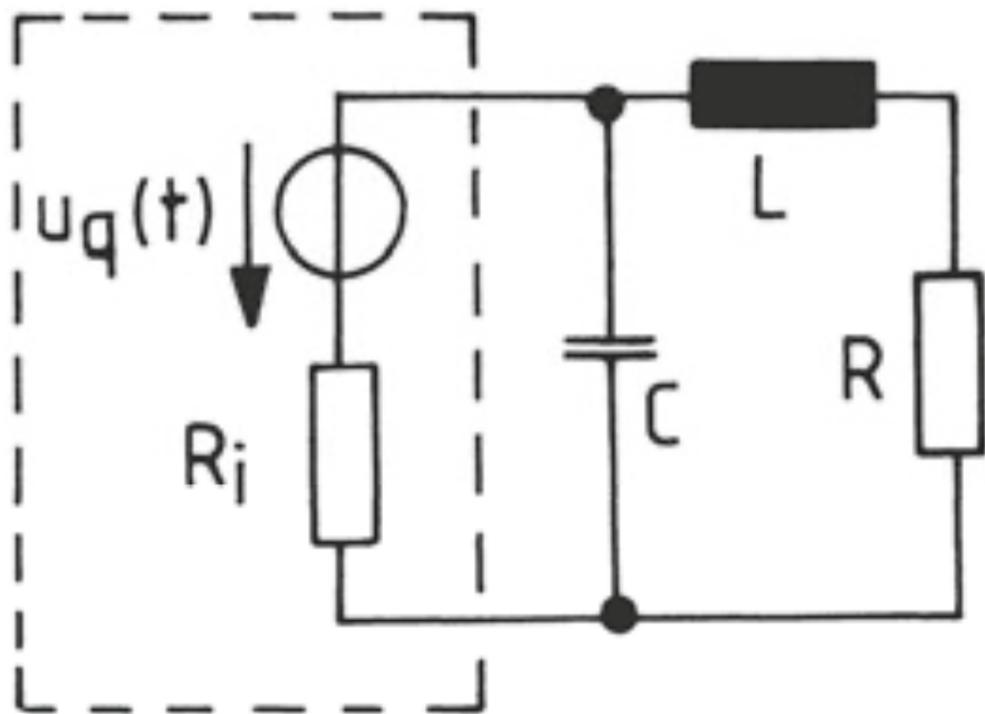


Abbildung 26.3.

Entn. aus [27]

Der Widerstand R soll mit Hilfe der Induktivität L und der Kapazität C an den Widerstand der Energiequelle angepasst werden.

- Entwickeln Sie zunächst die Bedingung für die Anpassung von aktivem und passivem Zweipol.
- Berechnen Sie die Werte für L und C für den Fall, dass der Widerstand $R = 10 \Omega$ einschließlich der Schaltelemente L und C an die Energiequelle mit dem Innenwiderstand $R_i = 100 \Omega$ bei einer Frequenz $f = 100 Hz$ angepasst ist.
- Kontrollieren Sie die Ergebnisse für L und C , indem Sie den Ersatzleitwert \underline{Y}_a des passiven Zweipols berechnen.

🔥 Lösung 11.3

a)

Anpassbedingung:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*$$

$$\underline{Y}_a = \underline{Y}_i^*$$

Der passive Zweipol ist eine Parallelschaltung, daher bietet sich die Anpassbedingung für Leitwerte an.

$$j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{1}{R_i}$$

$$j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L} \cdot \frac{R-j\omega L}{R-j\omega L} = \frac{1}{R_i}$$

$$\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \omega \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) = \frac{1}{R_i}$$

b)

Vergleich Realteil:

$$\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_i}$$

$$R \cdot R_i = R^2 + \omega^2 L^2$$

$$L = \frac{\sqrt{R \cdot R_i - R^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{10 \Omega \cdot 100 \Omega - (10 \Omega)^2}}{2\pi \cdot 100 Hz} = 47,74 mH$$

Vergleich Imaginärteil:

$$j\omega C = j\omega \cdot \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{47,74 mH}{(10 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 100 Hz)^2 \cdot (47,74 mH)^2} = 47,74 \mu F$$

c)

$$\underline{Y}_a = j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L} = j \cdot 2\pi \cdot 100 Hz \cdot 47,74 \mu F + \frac{1}{10 \Omega + j \cdot 2\pi \cdot 100 Hz \cdot 47,74 mH} = 10 mS = \frac{1}{R_i} = \frac{1}{100 \Omega}$$

Bei dem direkten Einsetzen in die Formel bekommt man einen kleinen Imaginärteil (im Bereich 10^{-6}) heraus. In der Originallösung wurde mit Zwischenschritten gearbeitet und gerundet, daher war in der Lösung nur ein reiner Realteil.

26.4. Aufgabe 11.4 (Transformer)

(Vaske/Fricke Beispiel 3.117)

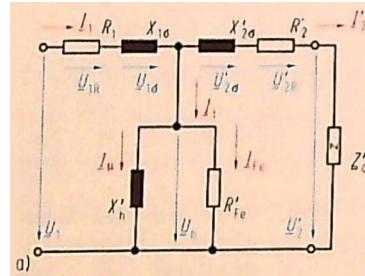


Abbildung 26.4.

Entn. aus [22]

Ein Einphasentransformator für die Nennleistung $S_N = 500 \text{ kVA}$ hat das Leerlauf-Spannungsübersetzungsverhältnis $\frac{U_1}{U_2} = \frac{20 \text{ kV}}{400 \text{ V}}$, den relativen Leerlaufstrom $i_l = 0,015$, die Leerlaufleistungsaufnahme $P_t = 1 \text{ kW}$, die relative Kurzschlussspannung $u_k = 0,06$ und die Kurzschlussleistungsaufnahme $P_k = 8 \text{ kW}$.

Die auf die Oberspannungsseite bezogenen Widerstände der symmetrischen Ersatzschaltung von dem Bild sind zu bestimmen.

Tipp:

relativer Leerlaufstrom:

$$i_l = \frac{I_l}{I_N}$$

relative Kurzschlussspannung:

$$u_k = \frac{U_k}{U_N}$$

Lösung 11.4

Berechnung des fiktiven Nennscheinwiderstand:

$$Z_{1N} = \frac{U_{1N}}{I_{1N}} = \frac{U_{1N}^2}{S_N} = \frac{(20 \text{ kV})^2}{500 \text{ kVA}} = 800 \Omega$$

Leerlaufversuch:

Wirkfaktor:

$$\cos \varphi_l = \frac{P_l}{i_l \cdot S_N} = \frac{1 \text{ kW}}{0,015 \cdot 500 \text{ kVA}} = 0,133$$

Scheinwiderstand:

$$Z_{1l} = \frac{U_{1N}}{I_{1l}} = \frac{Z_{1N}}{i_l} = \frac{800 \Omega}{0,015} = 53,33 k\Omega$$

die Längswiderstände werden vernachlässigt (Leerlaufversuch):

$$R'_{Fe} = \frac{Z_{1l}}{\cos(\varphi_l)} = \frac{53,33 k\Omega}{0,133} = 400 k\Omega$$

$$X'_h = \frac{Z_{1l}}{\sin(\varphi_l)} = \frac{53,33 k\Omega}{0,9911} = 53,81 k\Omega$$

Kurzschlussversuch:

Wirkfaktor:

$$\cos(\varphi_k) = \frac{P_k}{u_k \cdot S_N} = \frac{8 kW}{0,06 \cdot 500 kVA} = 0,2667$$

Scheinwiderstand:

$$Z_{1k} = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = u_k \cdot Z_{1N} = 0,06 \cdot 800 \Omega = 48 \Omega$$

die Querwiderstände werden vernachlässigt (Kurzschlussversuch):

$$R_1 = R'_2 = \frac{Z_{1k} \cdot \cos(\varphi_k)}{2} = \frac{48 \Omega \cdot 0,2667}{2} = 6,4 \Omega$$

$$X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = \frac{Z_{1k} \cdot \sin(\varphi_k)}{2} = \frac{48 \Omega \cdot 0,9638}{2} = 23,13 \Omega$$

27. Klausurvorbereitung II

- Übertragungsfunktion
- Brückenschaltung
- Parallelschwingkreis

27.1. Aufgabe 12.1 (Übertragungsfunktion)

(Weißgerber Aufgabensammlung Abschnitt 3 Aufgabenblatt 3 Aufgabe 1)

In der gezeichneten Schaltung soll die sinusförmige Ausgangsspannung u_2 mit der sinusförmigen Eingangsspannung u_1 in Phase sein.

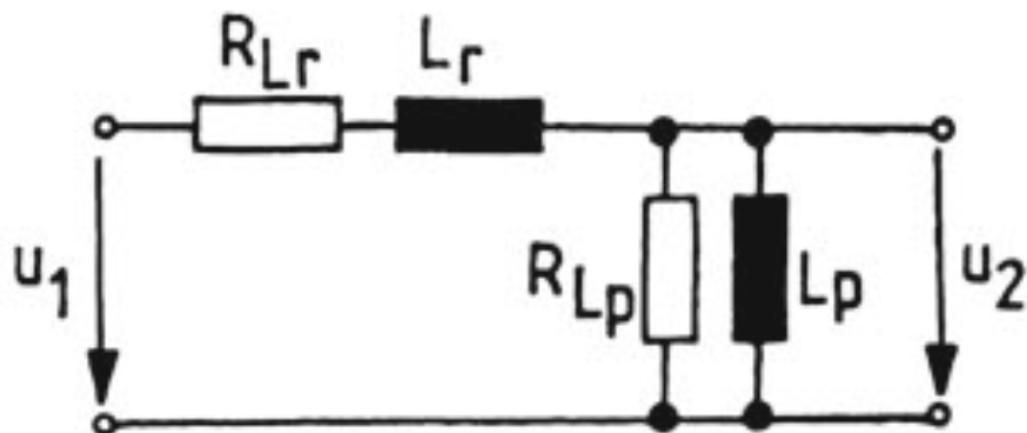


Abbildung 27.1.

Entn. aus [27]

- Entwickeln Sie das Spannungsverhältnis $\underline{U}_2 / \underline{U}_1$ in Form eines komplexen Nennoperators in algebraischer Form. (Hinweis: $\frac{1}{Re(\underline{Z}) + jIm(\underline{Z})}$)
- Bei welcher Kreisfrequenz ω ist die obige Bedingung erfüllt?
- Wie groß ist dann das Spannungsverhältnis $\underline{U}_2 / \underline{U}_1$, wenn $R_{Lr} = R_{Lp}$ und $L_r = L_p$ ist?

 Lösung 12.1

a)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_{Lp}} + j\omega L_p}}{\frac{1}{\frac{1}{R_{Lp}} + j\omega L_p} + R_{Lr} + j\omega L_r} = \frac{1}{1 + (R_{Lr} + j\omega L_r) \cdot \left(\frac{1}{R_{Lp}} + j\omega L_p \right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_{Lr}}{R_{Lp}} + \frac{L_r}{L_p} \right) + j \left(\frac{\omega L_r}{R_{Lp}} - \frac{R_{Lr}}{\omega L_p} \right)}$$

b)

u_2 und u_1 sind in Phase, wenn der Operator reell ist, d.h. der Imaginärteil 0 ist:

$$\frac{\omega L_r}{R_{Lp}} = \frac{R_{Lr}}{\omega L_p}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R_{Lr} \cdot R_{Lp}}{L_r \cdot L_p}}$$

c)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{3}$$

27.2. Aufgabe 12.2 (Brückenschaltung)

(Weißgerber Aufgabensammlung Abschnitt 3 Aufgabenblatt 5 Aufgabe 2)

Entn. aus [27]

- a) Entwickeln Sie für die gezeichnete Wechselstrombrücke die Abgleichbedingung und die Formel für ω . Welche Anwendung ergibt sich aus der Abgleichbedingung?
- b) Vereinfachen Sie die Ergebnisse mit $R_1 = 2 \cdot R_2$, $R_{r3} = R_{p4} = R$ und $L_{r3} = L_{p4} = L$.

 Lösung 12.2

a)

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = (R_{r3} + j\omega L_{r3}) \left(\frac{1}{R_{p4}} + j\omega L_{p4} \right)$$

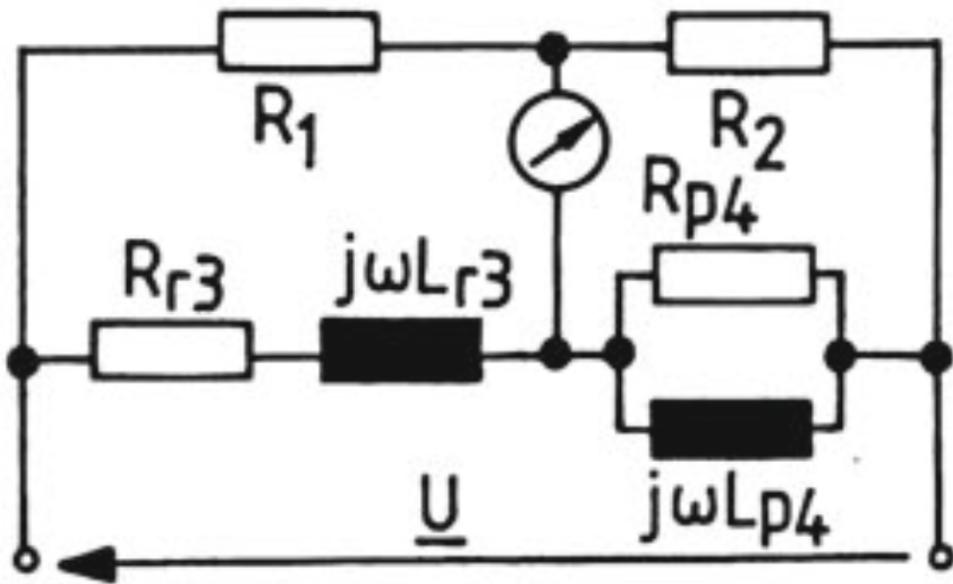


Abbildung 27.2.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{r3}}{R_{p4}} + \frac{L_{r3}}{L_{p4}} + \frac{j\omega L_{r3}}{R_{p4}} + \frac{R_{r3}}{j\omega L_{p4}}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{r3}}{R_{p4}} + \frac{L_{r3}}{L_{p4}} + j \cdot \left(\frac{\omega L_{r3}}{R_{p4}} - \frac{R_{r3}}{\omega L_{p4}} \right)$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{r3}}{R_{p4}} + \frac{L_{r3}}{L_{p4}}$$

$$\frac{\omega L_{r3}}{R_{p4}} = \frac{R_{r3}}{\omega L_{p4}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R_{r3} \cdot R_{p4}}{L_{r3} \cdot L_{p4}}}$$

Aus der frequenzabhängigen Abgleichbedingung folgt, dass die Wechselstrombrücke für die Messung von Spannungsfrequenzen geeignet ist. Allerdings wird in der Praxis die entsprechende Messbrücke mit Kapazitäten zur Messung von Frequenzen verwendet, weil verschiedene Vergleichsspulen in einer Brücke größer und ungenauer sind als Kapazitäten.

b)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R}{R} + \frac{L}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R^2}{L^2}} = \frac{R}{L}$$

27.3. Aufgabe 12.3 (Parallelschwingkreis)

(Weißgerber Aufgabensammlung Abschnitt 3 Aufgabenblatt 5 Aufgabe 3)

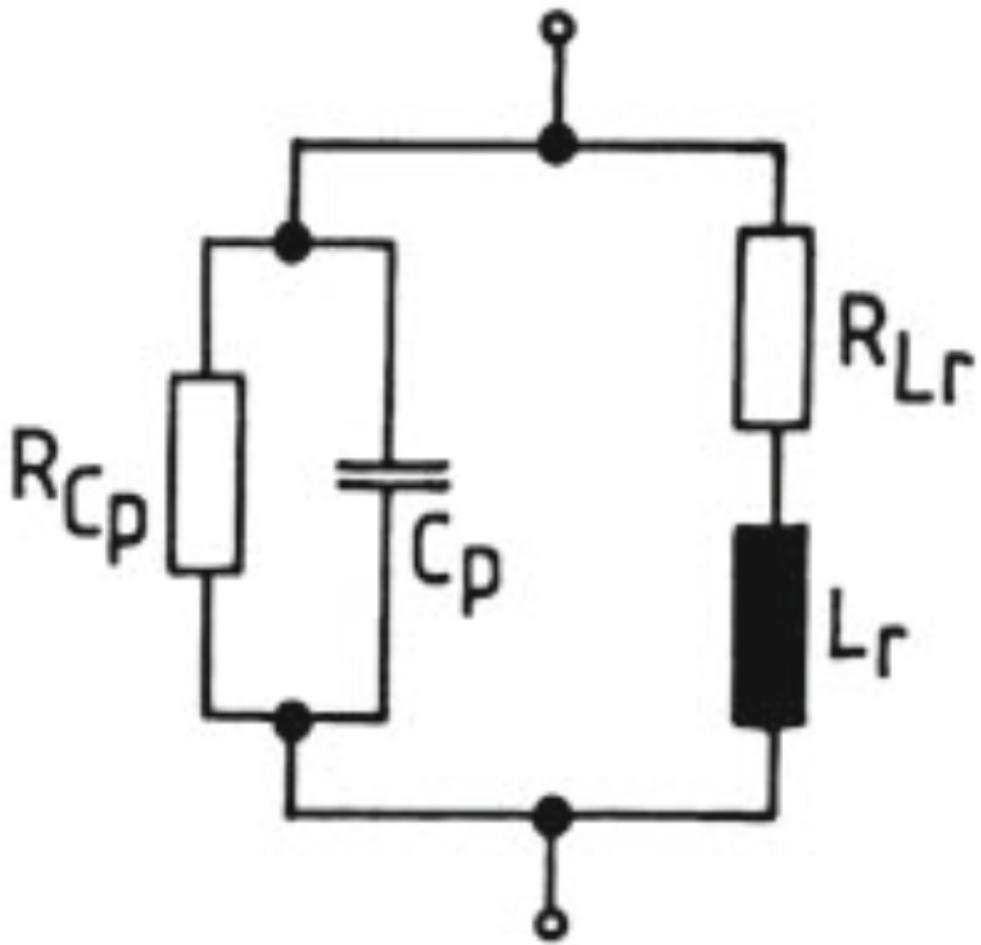


Abbildung 27.3.

Entn. aus [27]

Für den gezeichneten Parallelschwingkreis mit $R_{Cp} = 500 \Omega$, $C_p = 2 \mu F$, $R_{Lr} = 100 \Omega$ und $L_r = 0,1 H$ ist die Resonanzkurve zu ermitteln, indem der gezeichnete Schwingkreis in einen Parallelschwingkreis mit idealen Bauelementen R_p , C_p , L_p überführt wird.

- a) Berechnen Sie die Resonanzkreisfrequenz.

27.3. Aufgabe 12.3 (Parallelschwingkreis)

- b) Berechnen Sie L_p , R_{Lp} und R_p .
- c) Berechnen Sie anschließend die Güte Q_p des idealen Parallelschwingkreises.

Lösung 12.3

a)

$$\omega_0 C_p = \frac{1}{\omega_0 L_p} = \frac{\omega_0 L_r}{R_{Lr}^2 + \omega_0^2 L_r^2}$$

$$R_{Lr}^2 + \omega_0^2 L_r^2 = \frac{L_r}{C_p}$$

oder

$$\omega_0^2 L_r^2 = \frac{L_r}{C_p} - R_{Lr}^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{L_r}{L_r^2 C_p} - \frac{R_{Lr}^2}{L_r^2}$$

oder

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_r C_p} - \left(\frac{R_{Lr}}{L_r}\right)^2}$$

gleiche Formel wie die des Praktischen Parallel-Resonanzkreises

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{0,1 \text{ H} \cdot 2 \mu\text{F}} - \left(\frac{100 \Omega}{0,1 \text{ H}}\right)^2} = 2000 \text{ s}^{-1}$$

b)

$$L_p = \frac{R_{Lr}^2 + \omega_0^2 L_r^2}{\omega_0^2 L_r} = \frac{(100 \Omega)^2 + (2000 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ H})^2}{(2000 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0,1 \text{ H}} = 125 \text{ mH}$$

$$R_{Lp} = \frac{R_{Lr}^2 + \omega_0^2 L_r^2}{R_{Lr}} = \frac{(100 \Omega)^2 + (2000 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ H})^2}{100 \Omega} = 500 \Omega$$

$$R_p = \frac{500 \Omega}{2} = 250 \Omega$$

c)

$$Q_p = \frac{1}{G_p} \cdot \sqrt{\frac{C_p}{L_p}} = R_p \cdot \sqrt{\frac{C_p}{L_p}} = 250 \Omega \cdot \sqrt{\frac{2 \mu\text{F}}{125 \text{ mH}}} = 1$$

Literaturverzeichnis

- [1] Wikipedia, „Wechselstrom — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. 2025. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Wechselstrom&oldid=253327355>
- [2] Wikipedia, „Wechselstromgenerator — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. 2024. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Wechselstromgenerator&oldid=244474759>
- [3] M. Marinescu und N. Marinescu, *Elektrotechnik für Studium und Praxis*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016. doi: 10.1007/978-3-658-14159-2.
- [4] Wikipedia, „Bode-Diagramm — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. 2021. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bode-Diagramm&oldid=215892781>
- [5] M. Reisch, *Elektronische Bauelemente: Funktion, Grundschatungen, Modellierung mit SPICE*, 2. Aufl. Springer, 2007, S. 1517. doi: 10.1007/978-3-540-34015-7.
- [6] Wikipedia, „Ortskurve (Systemtheorie) — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. 2023. Verfügbar unter: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ortskurve_\(Systemtheorie\)&oldid=237346128](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ortskurve_(Systemtheorie)&oldid=237346128)
- [7] D. Mietke, „Elektroniktutor“, Oberstufenzentrum für Kommunikations-, Informations- und Medientechnik (OSZ-KIM), Berlin; online, techreport, 2024. Verfügbar unter: <https://www.elektroniktutor.de>
- [8] W.-E. Büttner, *Grundlagen der Elektrotechnik 2*. OLDENBOURG WISSENSCHAFTSVERLAG, 2014. doi: 10.1524/9783110371796.
- [9] R. Lerch, *Elektrische Messtechnik: Analoge, digitale und computergestützte Verfahren*. Springer Berlin Heidelberg, 2016. doi: 10.1007/978-3-662-46941-5.
- [10] T. Mühl, *Elektrische Messtechnik: Grundlagen, Messverfahren, Anwendungen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020. doi: 10.1007/978-3-658-29116-7.
- [11] Wikipedia, „Wien-Robinson-Brücke — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. 2019. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Wien-Robinson-Brücke&oldid=194933790>
- [12] W. R. Hewlett, „Variable Frequency Oscillation Generator“. U.S. Patent Office No. 2,268,872, Januar 1942. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/wiki/Wien-Robinson-Brücke>
- [13] O. Natt, *Physik mit Python*. Springer Berlin Heidelberg, 2020. doi: 10.1007/978-3-662-61274-3.
- [14] T. Harriehausen und D. Schwarzenau, *Moeller Grundlagen der Elektrotechnik*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020. doi: 10.1007/978-3-658-27840-3.
- [15] S. Paul und R. Paul, *Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik 3*. Springer Berlin Heidelberg, 2017. doi: 10.1007/978-3-662-44978-3.
- [16] Wikipedia, „Gütefaktor — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. 2025. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gütefaktor&oldid=254210812>

Literaturverzeichnis

- [17] M. Kasper, *Mikrosystementwurf*. Berlin, Germany: Springer, 2000.
- [18] S. Paul und R. Paul, *Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2019. doi: 10.1007/978-3-662-58221-3.
- [19] B. Wicht, *Design of Power Management Integrated Circuits*. Wiley, 2024. doi: 10.1002/9781119123095.
- [20] F. Zach, *Leistungselektronik: Ein Handbuch Band 1 / Band 2*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2022. doi: 10.1007/978-3-658-31436-1.
- [21] Wikipedia, „Phasenanschnittsteuerung — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. 2024. Verfügbar unter: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Phasenanschnittsteuerung&oldid=246116394>
- [22] H. Fricke und P. Vaske, *Elektrische Netzwerke Grundlagen der Elektrotechnik 1*, 17. Aufl. Stuttgart, Germany: B.G. Teubner, 1982.
- [23] S. Schenke, „Grundlagen der Elektrotechnik — Jetzt schaffst Du die Prüfung!“, Helmut-Schmidt Universität Hamburg, Germany; online, 2023. Verfügbar unter: <http://www.stefan-schenke.de/get/>
- [24] M. Albach und J. Fischer, *Elektrotechnik Aufgabensammlung*. Pearson, 2020. Verfügbar unter: <https://elibrary.pearson.de/book/99.150005/9783863268930>
- [25] G. Hagmann, *Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik*, 18., durchgesehene Auflage. Wiebelsheim: AULA-Verlag, 2019.
- [26] M. Dzieia, H. Hübscher, D. Jagla, J. Klaue, H.-J. Petersen, und H. Wickert, *Elektronik Tabellen Betriebs- und Automatisierungstechnik*, 2. Aufl. Braunschweig: Westermann, 2016.
- [27] W. Weißgerber, *Elektrotechnik für Ingenieure - Klausurenrechnen*, 6. Aufl. Springer Vieweg, 2015. doi: 10.1007/978-3-658-09088-3.